# Psicometria

## 4-Cenni di algebra matriciale
vers. 1.1

Germano Rossi[1]
germano.rossi@unimib.it
Giovanni Battista Flebus[1]
giovannibattista.flebus@unimib.it

[1] Dipartimento di Psicologia, Università di Milano-Bicocca

2008-2008

# Algebra

- Un'algebra è un **sistema di segni** in cui sono definite delle "operazioni"
- Nell'algebra scalare, i segni sono i singoli numeri ed è quella che conosciamo e usiamo tutti i giorni
- Nell'algebra dei vettori (in senso matematico e non geometrico/fisico) sono i "vettori"
- Nell'algebra matriciale sono le matrici
- In algebra matriciale un "numero" è chiamato "scalare"

# Vettori e matrici

- un vettore è un insieme di numeri che hanno qualche cosa in comune, ad es. esprimono le misurazioni di una variabile
- i singoli valori che contiene sono chiamati “elementi”

Vettore colonna

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vettore riga

$$\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

- una matrice è un insieme di numeri che hanno qualche cosa in comune, disposti in righe e colonne. Ad es. una tabella di dati statistici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

# Convenzioni sui nomi

- In generale un **vettore** si indica con una lettera minuscola in grassetto. Formalmente i vettori hanno due dimensioni, di cui una è uguale a 1

$$\mathbf{a}_{3x1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a'}_{1x3} = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

- Una **matrice** si indica con una lettera maiuscola in grassetto. Anche la matrice ha due dimensioni e il primo indice indica la riga e il secondo indica la colonna

$$\mathbf{A}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

# Generalizzazione

- Un vettore di dimensione n, può essere generalizzato tramite una lettera con indici

$$\mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a'}_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

- analogamente una matrice, in questo caso le dimensioni sono due

$$\mathbf{A}_{nxm} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

# Elementi corrispondenti

Gli elementi di due vettori/matrici che occupano le stesse posizioni (ovvero hanno gli stessi indici)

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \underset{\overline{\hspace{3cm}}}{\xrightarrow{\hspace{3cm}}} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} \underset{\overline{\hspace{3cm}}}{\xrightarrow{\hspace{3cm}}} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}$$

# Uguaglianza

Due vettori/matrici i cui elementi corrispondenti sono uguali

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} \overrightarrow{\underline{\qquad\qquad}} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}$$

# Opposti

Due vettori/matrici i cui elementi corrispondenti sono uguali ma di segno opposto

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}$$

# Trasposta

Si chiama trasposta un vettore in cui le righe diventano colonne o viceversa.

$$\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v'}_n = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

Le trasposte si indicano con un apice (a volte con una $\texttt{t}$ in apice, $\mathbf{a^t}$). Nei vettori, per definizione, il vettore riga si considera “trasposto” di un vettore colonna

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

# Operazioni

| | |
|---|---|
| Con gli scalari | addizione |
| | moltiplicazione |
| Tra vettori/matrici | addizione |
| | moltiplicazione |

Sottrazione e divisione sono considerate operazioni inverse.
La sottrazione è l'inversa dell'addizione (o addizione di un'opposto).
La divisione è l'inversa della moltiplicazione; nello scalare è la moltiplicazione per un reciproco.

# Operazioni con gli scalari: Addizione

Lo scalare viene sommato a tutti gli elementi del vettore/matrice

$$3 + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$3 + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

# Operazioni con gli scalari: Moltiplicazione

Lo scalare viene moltiplicato ad ogni elemento del vettore/matrice

$$3 * \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3*5 \\ 3*2 \\ 3*4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$3 * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

# Operazioni con gli scalari: Sottrazione/Divisione

Sottrazione come addizione di numero negativo

$$-3 + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+5 \\ -3+2 \\ -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Divisione come moltiplicazione per il reciproco

$$\frac{1}{3} * \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.67 \\ 0.67 \\ 1.33 \end{bmatrix}$$

# Operazioni fra vettori/matrici: Addizione

Somma degli elementi corrispondenti

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Solo se hanno le stesse dimensioni

# Operazioni fra vettori/matrici: Sottrazione

Somma del vettore/matrice opposta.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solo se hanno le stesse dimensioni

# Operazioni fra vettori: Moltiplicazione

Regola generale: Per ogni riga e ogni colonna, si moltiplica ciascun elemento di riga per ciascun elemento di colonna e quindi si sommano i prodotti per ogni riga/colonna.
Nel caso di due vettori: si possono moltiplicare fra loro solo vettori riga con vettori colonna o viceversa.

$$\mathbf{v}' * \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 5 * 1 + 2 * 2 + 4 * 3 = 21$$

Abbiamo un vettore di dimensione 1x3 che viene moltiplicato per un vettore 3x1, il risultato sarà un vettore 1x1 (cioè uno scalare)

# Operazioni fra vettori: Moltiplicazione

Per eseguire una moltiplicazione fra vettori/matrici, è obbligatorio che il primo vettore/matrice abbia tante colonne quante sono le righe del secondo vettore/matrice:

$$\mathbf{v}' * \mathbf{v} \Rightarrow 1xn * nx1 = 1x1$$

$$\mathbf{v} * \mathbf{v}' \Rightarrow nx1 * 1xn = nxn$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5*1 & 5*2 & 5*3 \\ 2*1 & 2*2 & 2*3 \\ 4*1 & 4*2 & 4*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Abbiamo un vettore di dimensione 3x1 che viene moltiplicato per un vettore 1x3, il risultato sarà una matrice 3x3

# Prodotto scalare e matriciale

- Per prodotto scalare di due vettori si intende la moltiplicazione della trasposta del primo per il secondo: ovvero $\mathbf{a}'\mathbf{b}$
- Per prodotto matriciale di due vettori si intende la moltiplicazione del primo per la trasposta del secondo: ovvero $\mathbf{a}\mathbf{b}'$

# Operazioni fra matrici: Moltiplicazione

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

Abbiamo una matrice di dimensione 2x3 che viene moltiplicata per una matrice 3x2, il risultato sarà una matrice 2x2

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 * 2 + 3 * 3 + 2 * (-2) = 2 + 9 - 4 = 7 \\ c_{12} &= 1 * 1 + 3 * 4 + 2 * 1 = 1 + 12 + 2 = 15 \\ c_{21} &= -1 * 2 + 2 * 3 + 3 * (-2) = -2 + 6 - 6 = -2 \\ c_{22} &= -1 * 1 + 2 * 4 + 3 * 1 = -1 + 8 + 3 = 10 \end{aligned}$$

# Matrici particolari: Zero e unità

Il vettore/matrice nullo è quello neutro rispetto alla somma e che rende nulla una moltiplicazione.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il vettore/matrice unitario o identità è quello neutro rispetto alla moltiplicazione (una matrice unitaria può essere solo quadrata, cioè di dimensione nxn).

$$\mathbf{1} = \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{1} = \mathbf{U} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Matrici particolari: diagonale e simmetrica

**Matrice diagonale**: una matrice quadrata con valori diversi da 0 lungo la diagonale principale e 0 negli altri

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Matrice simmetrica**: una matrice quadrata speculare lungo la diagonale principale

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

# Elementi notevoli

- **Traccia**: è la somma di tutti gli elementi sulla diagonale principale di una matrice

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_i \sum_j a_{ij} \text{ con i=j}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad tr(\mathbf{X}) = 1 + 5 + 0 = 6$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad tr(\mathbf{X}) = 1 + 5 + 0 = 6$$

$$\mathbf{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad tr(\mathbf{I_3}) = 1 + 1 + 1 = 3$$

# Determinante

- E' un valore che si può individuare a partire dagli elementi della matrice quadrata stessa; si indica con una lettera fra barre verticali

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

- eliminando una riga e una colonna, si ottiene una **submatrice**, per cui ogni elemento di una matrice 2x2 è una submatrice
- un **minore** è il determinante di una sottomatrice

# Matrice singolare

- E’ una matrice che ha determinante uguale a **zero**. In questo caso esiste almeno una riga o una colonna che può essere espressa come combinazione lineare di altre.
- Una matrice singolare è anche chiamata “non definita positiva” o “non positivamente definita”.
- Se il determinante è diverso da zero, la matrice è “non singolare” o “positivamente definita” o “definita positiva” e nessuna riga (o colonna) è esprimibile come combinazione lineare di alcune delle altre.

# Combinazione lineare

- $b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \cdots + b_n x_{in}$ (in forma algebrica)

$$b_1 \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} + b_2 \cdot \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \cdot x_{11} \\ b_1 \cdot x_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \cdot x_{12} \\ b_2 \cdot x_{22} \end{bmatrix}$$

- $3x_i + 4y_i$ (se $x' = [1 \quad 2]$ e $y' = [3 \quad 4]$)

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

# Rango di una matrice

- All'interno di una matrice possono essere identificati svariati minori di ordine inferiore.
- Un qualunque minore può essere nullo oppure no.
- Il **rango** di una matrice è l'ordine del massimo minore non nullo.
- Il rango di una matrice non singolare coincide con il suo ordine. Mentre in una matrice singolare coincide con il primo minore diverso da 0.
- Quindi con il numero di righe o di colonne che non sono combinazioni lineari delle altre.

# Matrice inversa

- L'inversa di una matrice (indicata con $-1$ in apice) corrisponde al reciproco di un numero, in quanto

$$\frac{1}{a}a = 1$$

- La matrice inversa ($\mathbf{A}^{-1}$) è la matrice che risolve questa relazione:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

- Dev'essere una matrice quadrata e non sempre esiste la matrice inversa di una matrice.

# Matrici e statistica

- Esistono dei prodotti scalari particolari che hanno un significato importante in statistica. Il prodotto scalare di un vettore con il vettore unitario ($\mathbf{1}'\mathbf{a}$) equivale alla somma dei valori: $\sum x_i$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = 1*1+1*2+1*3 = 6$$

che se dividiamo per $tr(\mathbf{1})$, otteniamo la media

- Il prodotto scalare di un vettore con se stesso ($\mathbf{a}'\mathbf{a}$) equivale alla somma dei quadrati: $\sum X_i^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1*1 + 2*2 + 3*3 = 15$$

- Il prodotto scalare di un vettore con un altro vettore ($\mathbf{a}'\mathbf{b}$) equivale alla somma dei prodotti o coprodotti: $\sum X_i Y_i$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 1*3 + 2*2 + 3*4 = 19$$