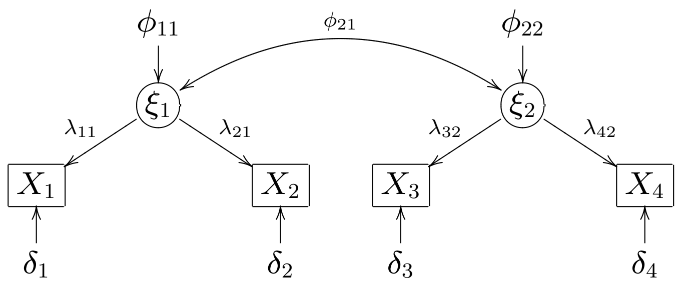
Covarianze espresse tramite i parametri (Corbetta, p.115-120)



Ogni osservata è oggetto di una retta di regressione:

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda_{11}\xi_1 + \delta_1 \qquad & X_3 &= \lambda_{32}\xi_2 + \delta_3 \\ X_2 &= \lambda_{21}\xi_1 + \delta_2 \qquad & X_4 &= \lambda_{42}\xi_2 + \delta_3 \end{aligned}$$

La varianza di ogni variabile endogena è esprimibile sulla base delle influenze che riceve. Considerato che V(X_1) = E(XX), possiamo sostituire una nell'altra:

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E(X_1X_1) = E[(\lambda_{11}\xi_1 + \delta_1)(\lambda_{11}\xi_1 + \delta_1)] = \\ &= E(\lambda_{11}^2\xi_1\xi_1 + 2\lambda_{11}\xi_1\delta_1 + \delta_1\delta_1) = \\ &= E(\lambda_{11}^2\xi_1\xi_1) + E(2\lambda_{11}\xi_1\delta_1) + E(\delta_1\delta_1) = \\ &= \lambda_{11}^2 E(\xi_1\xi_1) + 2\lambda_{11}E(\xi_1\delta_1) + E(\delta_1\delta_1) = \\ &= \lambda_{11}^2 V(\xi_1) + V(\delta_1) = \lambda_{11}^2\phi_{11} + \theta_{11} \end{aligned}$$

Siccome siamo in un'analisi fattoriale, $\phi_{11} = 1$ e quindi $V(X_1) = \lambda_{11}^2 + \theta_{11}$ che può essere pensato come **var. spiegata** (λ_{11}^2) + **var. non spiegata** (θ_{11}) o *var. d'errore*. E in questo caso, la var. spiegata è anche l'R^2.

La varianza spiegata di una variabile dipendente si può dividere in parti che dipendono dalle variabili che la influenzano direttamente.

Ciascuna di queste parti è formata dal legame diretto moltiplicato per la somma di tutti i legami diretti e indiretti fra le due variabili.

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{11} &= \lambda_{11}(\lambda_{11}\phi_{11}) \\
\hat{\sigma}_{22} &= \lambda_{21}(\lambda_{21}\phi_{11}) \\
\hat{\sigma}_{33} &= \lambda_{32}(\lambda_{32}\phi_{22}) \\
\hat{\sigma}_{44} &= \lambda_{42}(\lambda_{42}\phi_{22})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(X_1X_3) &= E(X_1X_3) = E[(\lambda_{11}\xi_1 + \delta_1)(\lambda_{32}\xi_2 + \delta_3)] = \\
&= E(\lambda_{11}\lambda_{32}\xi_1\xi_2 + \lambda_{11}\xi_1\delta_3 + \lambda_{32}\xi_2\delta_1 + \delta_1\delta_3) = \\
&= E(\lambda_{11}\lambda_{32}\xi_1\xi_2) + E(\lambda_{11}\xi_1\delta_3) + E(\lambda_{32}\xi_2\delta_1) + E(\delta_1\delta_3) = \\
&= \lambda_{11}\lambda_{32}E(\xi_1\xi_2) + \lambda_{11}E(\xi_1\delta_3) + \lambda_{32}E(\xi_2\delta_1) + E(\delta_1\delta_3) = \\
&= \lambda_{11}\lambda_{32}X(\xi_1\xi_2) = \lambda_{11}\lambda_{32}\phi_{21}
\end{aligned}$$

La covarianza fra due variabili può essere scomposta in tante parti quanti sono i percorsi che li collegano fra loro. Ogni parte è il prodotto dei coefficienti.

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{21} &= \lambda_{11}\lambda_{21}\phi_{11} \\
\hat{\sigma}_{31} &= \lambda_{11}\lambda_{32}\phi_{21} \\
\hat{\sigma}_{41} &= \lambda_{11}\lambda_{42}\phi_{21} \\
\hat{\sigma}_{32} &= \lambda_{21}\lambda_{32}\phi_{21} \\
\hat{\sigma}_{42} &= \lambda_{21}\lambda_{42}\phi_{21} \\
\hat{\sigma}_{43} &= \lambda_{32}\lambda_{42}\phi_{22}
\end{aligned}$$

Covarianze fra osservate (Corbetta, p.196 ss.)

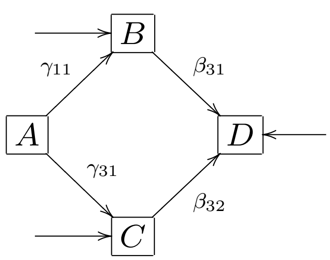
La correlazione fra due variabili è pari alla somma di tutti percorsi possibili fra le due variabili (effetti diretti e indiretti, relazioni spurie e congiunte). Gli effetti diretti e indiretti sono la componente causale, mentre gli effetti spuri e congiunti la componente non causale.

Esempio

```
DA NI=4 NO=200 MA=CM
LA
A B C D


CM
4.00
1.04 1.00
1.36  .35 1.00
 .90  .75  .34 1.00
SE
B C D A
MO NX=1 NY=3 BE=FU,FI GA=FU, FI PS=DI,FR
FR GA(1,1) GA(2,1)
FR BE(2,1) BE(3,1)
OU
```

Vale la pena di notare che la variabile B è l'unica non standardizzata.



Per stimare i parametri di regressione, scriviamo le equazioni:

$$
\begin{aligned}
B &= \gamma_{11} A + \zeta_B \\
C &= \gamma_{21} A + \zeta_C \\
D &= \beta_{31} B + \beta_{32} C + \zeta_D
\end{aligned}
$$

Le prime due sono regressioni semplici, la terza una regressione multipla.

Per trovare i parametri *gamma*, basta usare la formula delle covarianze:

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= \frac{C_{AB}}{V_A} = \frac{1.04}{4} = .26 \\ \gamma_{21} &= \frac{C_{AC}}{V_A} = \frac{1.36}{4} = .34\end{aligned}$$

I beta sono all'interno di una regressione multipla, quindi abbiamo due soluzioni.

1.

$$\begin{bmatrix} V_B & C_{BC} \\ C_{BC} & V_C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{DB} \\ C_{DC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & .35 \\ .35 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} .75 \\ .34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{31} \\ \beta_{32} \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned}\beta_{31} &= \frac{V_C C_{DB} - C_{BC} C_{DC}}{V_B V_C - C_{BC}^2} = \frac{1 \times .75 - .35 \times .34}{1 \times 1 - .35^2} = .719 \\ \beta_{32} &= \frac{V_B C_{DC} - C_{BC} C_{DB}}{V_B V_C - C_{BC}^2} = \frac{1 \times .34 - .35 \times .75}{1 \times 1 - .35^2} = .088\end{aligned}$$

L'R^2 di queste equazioni è:

- $R^2 = r^2$ per le prime due equazioni (reg. semplici)
- $R^2 = \sum(b^*_{yi} r_{yi})$ per la terza (reg. multipla)

Per standardizzare γ_{11} e γ_{21} dovremo moltiplicare per il rapporto delle dev.stand. oppure calcolare direttamente r. Cioè

$$\begin{aligned}\gamma^*_{11} &= \gamma_{11}\frac{\sqrt{V_A}}{\sqrt{V_B}} = .26\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}} = \frac{C_{AB}}{\sqrt{V_A V_B}} = \frac{1.04}{\sqrt{4 \times 1}} = .52 \\ \gamma^*_{21} &= \gamma_{21}\frac{\sqrt{V_A}}{\sqrt{V_C}} = .34\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}} = \frac{C_{AC}}{\sqrt{V_A V_C}} = \frac{1.36}{\sqrt{4 \times 1}} = .68\end{aligned}$$

Anche per standardizzare le beta, dovremmo moltiplicare per il rapporto delle dev. stand., sennonché le variabili B, C e D sono già standardizzate (var=1) e quindi i beta sono a loro volta standardizzati.

$$
\begin{aligned}
R_B^2 &= .52^2 = .270 \\
R_C^2 &= .68^2 = .462 \\
R_D^2 &= .719 \times .75 + .088 \times .34 = .569 \text{ [.563 in Lisrel]}
\end{aligned}
$$

La varianza di una variabile dipendente si può suddividere in una parte spiegata dai legami causali che riceve e una parte non spiegata (o varianza d'errore). La varianza non spiegata (gli errori) si può calcolare come differenza da quella spiegata:

$$
\begin{aligned}
\psi_{11} &= 1 - R_B^2 = 1 - .27 = .73 \\
&= V_B - \hat{V}_B = V_B - V(\gamma_{11} V_A) = 1 - .26^2 \times 4 = .73 \\
\psi_{22} &= V_C - V(\gamma_{21} V_A) = 1 - .34^2 \times 4 = .538 \\
\psi_{33} &= V_D - V(\beta_{31} B + \beta_{32} C) = 1 - (.719^2 + \\
& \quad .088^2 + 2 \times .719 \times .088 \times .35) = .431[.438]
\end{aligned}
$$

Le formule usate derivano da:

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_B &= \gamma_{11}^2 V_A \\
\hat{V}_C &= \gamma_{21}^2 V_A \\
\hat{V}_D &= \beta_{31}^2 V_B + \beta_{32}^2 V_C + 2\beta_{31}\beta_{32} C(BC)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(D) &= E(DD) = E[(\beta_{31}B + \beta_{32}C + \zeta_D)(\beta_{31}B + \beta_{32}C + \zeta_D)] \\
&= E(\beta_{31}^2 BB + \beta_{31}\beta_{32} BC + \beta_{31} B\zeta_D + \beta_{31}\beta_{32} BC + \\
&= \beta_{32}^2 CC + \beta_{32} C\zeta_D + \beta_{31} B\zeta_D + \beta_{32} C\zeta_D + \zeta_D\zeta_D) \\
&= \beta_{31}^2 E(BB) + \beta_{31}\beta_{32} E(BC) + 0 + \beta_{31}\beta_{32} E(BC) + \\
&= \beta_{32}^2 E(CC) + 0 + 0 + 0 + E(\zeta_D\zeta_D) \\
&= \beta_{31}^2 V(B) + \beta_{32}^2 V(C) + 2\beta_{31}\beta_{32} C(BC) + \psi_D
\end{aligned}
$$