AUTOVALUTAZIONE di Algebra Matriciale

Assumendo che:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

calcola

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{B} + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{A} + \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 24 & 26 \\ 16 & 23 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{AB}' = \begin{bmatrix} 21 & 16 \\ 15 & 15 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 22 \\ 6 & 13 & 24 \\ 10 & 10 & 26 \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{CAD} = \begin{bmatrix} 92 & 77 & 120 \\ 104 & 79 & 130 \\ 108 & 92 & 142 \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{1}'\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \end{bmatrix}$

9. $|\mathbf{E}| = (1 \times 4 - 5 \times 3) = 4 - 15 = -11$

10. $|\mathbf{F}| = (1 \times 3 - 4 \times 4) = 3 - 16 = -13$

11. $|\mathbf{D}| = (1\times1\times2+3\times4\times3+5\times2\times2-5\times1\times3-3\times2\times2-1\times4\times2) = 2+36+20-15-12-8 = 23$

12. $\mathbf{E^{-1}} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.364 & 0.273 \\ 0.454 & -0.091 \end{bmatrix}$

13. $\mathbf{F^{-1}} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.231 & 0.308 \\ 0.308 & -0.077 \end{bmatrix}$

14. $\mathbf{D^{-1}} = \frac{1}{23}\begin{bmatrix} -6 & 4 & 7 \\ 8 & -6 & 6 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.261 & 0.174 & 0.304 \\ 0.348 & -0.565 & 0.261 \\ 0.043 & 0.304 & -0.217 \end{bmatrix}$

    procedura per trovare i cofattori:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-8) & -(4-12) & (4-3) \\ -(6-10) & (2-8) & -(2-9) \\ (12-5) & -(4-10) & (1-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 8 & 1 \\ 4 & -6 & 7 \\ 7 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

    e trasporre

15. $(\mathbf{AC})^{-1} = \frac{1}{136}\begin{bmatrix} 23 & -26 \\ -16 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.169 & -0.191 \\ -0.118 & 0.176 \end{bmatrix}$

16. $(\mathbf{AB'})^{-1} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 15 & -16 \\ -15 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.200 & -0.213 \\ -0.200 & 0.280 \end{bmatrix}$

17. $\mathbf{DD^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{23}\begin{bmatrix} -6 & 4 & 7 \\ 8 & -6 & 6 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

18. $\mathbf{M} = \mathbf{1'G}\frac{1}{5} = \begin{bmatrix} 12 & 11 \end{bmatrix} \frac{1}{5} = \begin{bmatrix} 2.4 & 2.2 \end{bmatrix}$

19. $\mathbf{Q} = \mathbf{M'M} = \begin{bmatrix} 5.76 & 5.28 \\ 5.28 & 4.84 \end{bmatrix}$

20. $\mathbf{S} = \mathbf{G'G}\frac{1}{5} = \begin{bmatrix} 40 & 30 \\ 30 & 31 \end{bmatrix} \frac{1}{5} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 6.2 \end{bmatrix}$

21. $\mathbf{V} = \mathbf{S} - \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2.24 & 0.72 \\ 0.72 & 1.36 \end{bmatrix}$

22. Cosa rappresentano rispettivamente **M**, **Q**, **S** e **V**?

    Se ipotizziamo che la prima colonna di **G** contenga la variabile X e la seconda colonna la variabile Y, allora

    - **M** rappresenta le medie delle due colonne di **G** (cioè la media di X e di Y);
    - **Q** contiene i quadrati di ciascuna media ($\bar{X}^2$ e $\bar{Y}^2$, mentre la diagonale secondaria contiene il prodotto delle due medie ($\bar{X}\bar{Y}$)); in sintesi contiene "i quadrati delle medie";
    - lungo la diagonale principale di **S** c'è la media dei quadrati delle due colonne di **G** (ovvero $\frac{\sum X^2}{N}$ e $\frac{\sum Y^2}{N}$) e fuori la diagonale la media dei coprodotti (ovvero $\frac{\sum XY}{N}$); in pratica le "le medie dei quadrati";
    - se ricordiamo che la varianza è riassumibile come "la media dei quadrati meno i quadrati delle medie", allora è evidente che **V** contiene le varianze/covarianze delle colonne di **G**.