

Soluzioni

ESAME PSICOMETRIA 15 aprile 2004
Turno A ore 10.30

ALGEBRA

A.A1. Inverti la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Il primo passaggio è quello di calcolare il determinante. Quindi:

$$2 \times 1 \times 1 + 0 \times 3 \times 3 + 4 \times 2 \times 2 - 2 \times 1 \times 3 - 0 \times 4 \times 1 - 2 \times 3 \times 2 = 0$$

Il determinante è nullo e la matrice non si può invertire.

MODELLO CAUSALE E REGRESSIONE

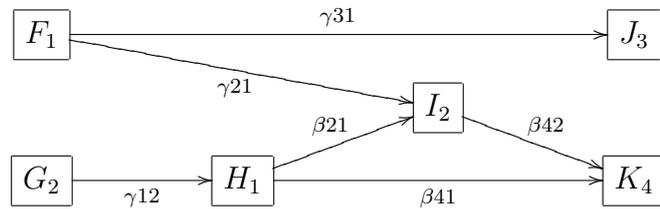
Disponiamo di 6 variabili osservate (F, G, H, I, J, K) su un campione di N=150, di cui le tabelle che seguono mostrano le sommatorie, i prodotti incrociati o le varianze/covarianze di alcune variabili.

J è spiegata da F; I è spiegata da F e da H e spiega K; G spiega H; K è spiegata da H e da I.

Sommatorie				
	$\sum x$	$\sum x^2$	Prodotti incrociati	
F	234	506	$\sum FJ$	= 923
H	555	2123	$\sum HK$	= 1307
J	591	2395		
K	351	1137		

Varianze/covarianze						
	F	G	H	I	J	K
F	?????					
G	0,021	0,780				
H	0,075	-0,015	0,466			
I	0,061	0,003	0,009	0,219		
J	?????	-0,071	0,015	0,026	0,446	
K	0,170	0,018	?????	-0,035	0,034	2,119

A.M1. **Disegna il modello causale completo (indicando i parametri con notazione Lisrel).**



A.M2. **Indica il numero di regressioni semplici e multiple implicate dal modello.**

2 semplici e 2 multiple.

A.M3. **Scrivi ciascuna delle rette di regressione (in ordine alfabetico della dipendente) implicate dal modello (parametri NON standardizzati) usando i parametri in notazione Lisrel indicati nel grafico precedente.**

Se usiamo la notazione Lisrel abbiamo due possibilità: a) ipotizziamo di lavorare con dati espressi come scarti dalla media (default in Lisrel), per cui la costante è pari a 0; b) usiamo il simbolo che utilizza Lisrel per indicare la costante (α).

$$\begin{aligned}
 H &= \alpha_1 + \gamma_{12}G + \zeta_1 \\
 I &= \alpha_2 + \gamma_{21}F + \beta_{21}H + \zeta_2 \\
 J &= \alpha_3 + \gamma_{31}F + \zeta_3 \\
 K &= \alpha_4 + \beta_{41}H + \beta_{42}I + \zeta_4
 \end{aligned}$$

Al posto di ζ si poteva usare anche ε .

A.M4. **Scrivi la matrice GA (gamma) e la matrice BE (beta) indicando quali parametri dovrai stimare per la verifica del modello.**

$$GA = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 0 \\ \gamma_{31} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{41} & \beta_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A.M5. **Calcola i parametri standardizzati dell'equazione che spiega J.**

E' una regressione semplice e il parametro standardizzato coincide con la correlazione. Disponiamo della matrice di varianza/covarianza, quindi il modo più veloce è la formula:

$$\frac{cov(FJ)}{\sqrt{var(F)var(J)}}$$

Però ci mancano due delle informazioni che possiamo ricavare con le sommatorie:

$$c(FJ) = \frac{923}{150} - \frac{234}{150} \times \frac{591}{150} = .007 \quad v(F) = \frac{506}{150} - \left(\frac{234}{150}\right)^2 = .940$$

$$\gamma_{31} = \frac{.007}{\sqrt{.940 \times .446}} = .011$$

A.M6. **Calcola i parametri non standardizzati dell'equazione che spiega K.**

Essendo una regressione multipla, possiamo usare $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{c}$. Consultando la matrice di varianza/covarianza abbiamo tutti i valori necessari tranne la cov(HK) che dobbiamo calcolare:

$$c(HK) = \frac{1307}{150} - \frac{555}{150} \times \frac{351}{150} = .055$$

$$\begin{bmatrix} .466 & .009 \\ .009 & .219 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} .055 \\ -.035 \end{bmatrix} = \frac{1}{.466 \times .219 - .009^2} \begin{bmatrix} .219 & -.009 \\ -.009 & .466 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .055 \\ -.035 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{.219 \times .055 - .009(-.035)}{0.102} \\ \frac{-.009 \times .055 + .466(-.035)}{0.102} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .121 \\ -.165 \end{bmatrix}$$

Abbiamo così trovato i parametri di regressione corrispondenti a β_{41} e a β_{42} . La costante α_3 (non necessaria perché i dati sono espressi come scarti dalla media, il default in Lisrel) potrebbe essere calcolata con: $\alpha_3 = \bar{K} - \beta_{41}\bar{H} - \beta_{42}\bar{I}$, ma non abbiamo le informazioni necessarie per calcolare \bar{I} .

A.M7. **Calcola il valore di F per verificare il modello completo del punto precedente.**

Dal momento che dobbiamo verificare il modello globale, useremo la formula

$$F = \frac{R_f^2/k}{(1 - R_f^2)/(N - k - 1)}$$

e ci serve il valore di R_f^2 , cioè l' R^2 dell'equazione che spiega K. Per calcolare l' R^2 , dobbiamo fare $R^2 = b_1^*r_{y1} + b_2^*r_{y2}$, quindi dobbiamo calcolare i due parametri standardizzati e le due correlazioni. Possiamo unire tutte le formule assieme:

$$R^2 = .121 \frac{\sqrt{.466}}{\sqrt{2.119}} \frac{.055}{\sqrt{2.119}\sqrt{.466}} + (-.165) \frac{\sqrt{.219}}{\sqrt{2.119}} \frac{-.035}{\sqrt{2.119}\sqrt{.219}} =$$

$$= .121 \frac{.055}{2.119} + (-.165) \frac{-.035}{2.119} = .003 + .003 = .006$$

$$F = \frac{.006/2}{(1 - .006)/(150 - 2 - 1)} = \frac{.003}{.994/147} = .444$$

A.M8. **Scrivi il programma Lisrel per il modello causale in M1 (ignorare PS e PH).**

```
da ni=6 no=150 ma=cm
cm
<dati>
la
f g h i j k /
se
```

h i j k f g /
 mo nx=2 ny=4 ga=fu,fi be=fu,fi
 fr ga 3,1 ga 2,1 ga 1,2
 fr be 2,1 be 4,1 be 4,2
 pd
 ou

Turno B ore 12.00

ALGEBRA

B.A1. Inverti la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Il primo passaggio è quello di calcolare il determinante. Quindi:

$$1 \times 0 \times 2 + 2 \times 1 \times 2 + 2 \times 4 \times 3 - 3 \times 0 \times 2 - 2 \times 2 \times 2 - 1 \times 1 \times 4 = 16$$

Quindi

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} -4 & 8 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \\ 8 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

MODELLO CAUSALE E REGRESSIONE

Disponiamo di 6 variabili osservate (F, G, H, I, J, K) su un campione di N=150, di cui le tabelle che seguono mostrano le sommatorie, i prodotti incrociati o le varianze/covarianze di alcune variabili.

J è spiegata da F; I è spiegata da F e da H e spiega K; G spiega H; K è spiegata da H e da I.

Sommatorie				
	$\sum x$	$\sum x^2$	Prodotti incrociati	
F	269	613	$\sum FI$	= 1049
I	303	807	$\sum JK$	= 696
J	590	2384		
K	349	1113		

	Varianze/covarianze					
	F	G	H	I	J	K
F	?????					
G	-0,025	0,671				
H	-0,018	-0,003	0,211			
I	?????	0,034	-0,039	1,308		
J	-0,060	0,010	-0,013	-0,072	0,425	
K	-0,019	0,247	-0,065	-0,060	?????	2,020

B.M1-4, M8. Le risposte alle domande da B.M1 a B.M4 e la B.M8 sono identiche a quelle del turno A.

B.M5. Calcola i parametri standardizzati dell'equazione che spiega J.

E' una regressione semplice e il parametro standardizzato coincide con la correlazione. Disponiamo della matrice di varianza/covarianza, quindi il modo più veloce è la formula:

$$\frac{cov(FJ)}{\sqrt{var(F)var(J)}}$$

Però ci manca una delle informazioni che possiamo ricavare con le sommatorie:

$$v(F) = \frac{613}{150} - \left(\frac{269}{150}\right)^2 = .871$$

$$\gamma_{31} = \frac{-.060}{\sqrt{.871 \times .425}} = -.099$$

B.M6. Calcola i parametri non standardizzati dell'equazione che spiega K.

Essendo una regressione multipla, possiamo usare $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{c}$. Consultando la matrice di varianza/covarianza abbiamo tutti i valori necessari:

$$\begin{bmatrix} .211 & -.039 \\ -.039 & 1.308 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -.065 \\ -.060 \end{bmatrix} = \frac{1}{.211 \times 1.308 - .039^2} \begin{bmatrix} 1.308 & .039 \\ .039 & .211 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -.065 \\ -.060 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1.308 \times (-.065) + .039(-.06)}{0.274} \\ \frac{.039 \times (-.065) + .211(-.06)}{0.274} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.319 \\ -.055 \end{bmatrix}$$

Abbiamo così trovato i parametri di regressione corrispondenti a β_{41} e a β_{42} . La costante α_3 (non necessaria perché i dati sono espressi come scarti dalla media, il default in Lisrel) potrebbe essere calcolata con: $\alpha_3 = \bar{K} - \beta_{41}\bar{H} - \beta_{42}\bar{I}$, ma non abbiamo le informazioni necessarie per calcolare \bar{H} .

B.M7. Calcola il valore di F per verificare il modello completo del punto precedente.

Dal momento che dobbiamo verificare il modello globale, useremo la formula

$$F = \frac{R_f^2/k}{(1 - R_f^2)/(N - k - 1)}$$

e ci serve il valore di R_f^2 , cioè l' R^2 dell'equazione che spiega K. Per calcolare l' R^2 , dobbiamo fare $R^2 = b_1^*r_{y1} + b_2^*r_{y2}$, quindi dobbiamo calcolare i due parametri standardizzati e le due correlazioni. Possiamo unire tutte le formule assieme:

$$\begin{aligned} R^2 &= -.319 \frac{\sqrt{.211}}{\sqrt{2.02}} \frac{-.065}{\sqrt{2.02}\sqrt{.211}} + (-.055) \frac{\sqrt{1.308}}{\sqrt{2.02}} \frac{-.06}{\sqrt{2.02}\sqrt{1.308}} = \\ &= -.319 \frac{-.065}{2.02} + (-.055) \frac{-.06}{2.02} = .010 + .002 = .012 \\ F &= \frac{.012/2}{(1 - .012)/(150 - 2 - 1)} = \frac{.006}{.988/147} = .893 \end{aligned}$$