Appunti di algebra matriciale

Germano Rossi
germano.rossi@unimib.it *

2 aprile 2004
vers. 0.8.9

Indice

*Università degli Studi di Milano-Bicocca, Dipartimento di Psicologia

1 Premessa

Come è mia abitudine (Rossi, 2000; ?), queste pagine non vogliono essere un testo “formale”, ma un aiuto ai miei studenti che “ritengono” di avere difficoltà con la matematica e tutto ciò che implicano i numeri e le formule.

Il linguaggio che utilizzerò sarà il più possibile vicino a ciò che io credo sia la semplicità, spiegando anche cose che potrebbero non essere facilmente comprensibili ad alcuni, ma ovvie per altri. C'è quindi un implicito invito al lettore che ha comunque difficoltà di comprensione, a contattare l'autore per chiedere ulteriori spiegazioni e/o suggerire miglioramenti.

Non c'è nulla di originale in questi “Appunti”, perché mi limito a collazionare informazioni prese da altri libri di testo (Namboodiri, 1984; Sen & Srivastava, 1990; Stevens, 1992; Tacq, 1997; Caudek & Luccio, 2001; Corbetta, 2002), partendo dall'*Appendice* di Lis, Rossi, e Venuti (1986).

2 Introduzione

Per cominciare, ricordiamo che un'“algebra” è un sistema in cui sono definite delle “operazioni” effettuabili con determinati elementi. Nell'algebra che conosciamo (chiamiamola *algebra numerica* o *algebra scalare*), ci sono i numeri e le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione (per citarne solo alcune).

In ambito statistico, si ha spesso a che fare con molti dati, numeri che rappresentano diverse “misurazioni” sulla stessa “unità statistica” e molte “unità statistiche”. E ci si abitua a considerarli come delle grandi tabelle (vedi un esempio in Tab. 1) in cui le righe rappresentano i casi statistici e le colonne le misurazioni che sono state effettuate (le variabili).

Questo sistema va benissimo quando si lavora con i *dati*, ma diventa un po' problematico quando si usano le formule e si studiano le tecniche. Ad esempio, la formula generica per il calcolo della media aritmetica è:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

In questa formula x sta ad indicare una qualunque variabile, x_i un qualunque elemento di questa generica variabile (ovvero una qualunque colonna i della tabella dati) e il simbolo di sommatoria $\sum$ indica che dobbiamo sommare tutti gli elementi di quella colonna.

Se dovessimo lavorare sull'intera tabella di numeri, dovremmo ogni volta generalizzare utilizzando un'indicazione a due indici (x_{ij}), dove i indicherebbe una qualunque riga e j una qualunque colonna. Sarebbe molto più comodo poter sintetizzare il tutto in un solo simbolo.

La stessa cosa succede con il linguaggio: quando si dispone di un concetto complesso e ci si accorge che si ha necessità di usarlo parecchie volte, si inventa una “parola” che lo esprima in modo sintetico. A questo punto, la nuova parola può essere usata tutte le volte che serve, anche in frasi a loro volta complesse. E' questo un procedimento che dovrebbe essere famigliare a tutti quelli che hanno studiato filosofia. Ma che è usatissimo anche nell'ambito della psicologia (termini come inconscio, *insight*, *gestalt*, categorizzazione, pregiudizio, stereotipo, lallazione... sintetizzano concetti complessi della psicoanalisi, della psicologia generale, sociale o dello sviluppo).

Tabella 1: Esempio di dati statistici

	sesso	QI	Test 1	Test 2
1	m	110	75	32
2	f	115	83	30
...	...	...	...	...

Ed è esattamente ciò che succede in *algebra matriciale*, i cui elementi di base sono le *matrici* anziché i numeri.

In algebra matriciale, un singolo numero viene chiamato "scalare" (da cui il nome di algebra scalare). Una serie di numeri associati fra loro sono un "vettore" e una tabella di numeri fra di loro associati è chiamata "matrice". Un vettore e uno scalare possono essere pensati come casi particolari di una matrice. Però, per semplicità di esposizione, inizieremo con i vettori.

3 Vettori

Un vettore è un insieme di numeri che, in qualche modo, sono fra loro associati. Ad es. un vettore potrebbe rappresentare una variabile misurata su più soggetti o un soggetto con tutte le "misurazioni" effettuate su di lui. Questi sono due esempi numerici di vettori:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 12 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Il primo dei due vettori potrebbe rappresentare una variabile ed è chiamato un *vettore colonna*, mentre il secondo potrebbe rappresentare un soggetto ed è chiamato un *vettore riga*.

Quando ci si vuole riferire ad un vettore generico, si usa una specifica notazione: una lettera minuscola (in grassetto) indica il vettore nel suo insieme, mentre la stessa lettera in corsivo seguita da un indice indica un singolo valore del vettore, chiamato "elemento". Il vettore colonna precedente può essere formalizzato come:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

dove a_1 indica il primo elemento del vettore (cioè 5), a_2 il secondo (12) e così via.

In modo ancora più generico, possiamo scrivere:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

dove n è il numero di elementi che compongono il vettore ed è anche chiamato la *dimensione* o l'*ordine* del vettore. Per motivi che diverranno chiari più avanti, la dimensione di un vettore colonna è definibile come $n \times 1$ (n righe e 1 colonna) e quella di un vettore riga come $1 \times n$ (1 riga e n colonne).

In genere, con il solo termine "vettore" si intende un vettore colonna, mentre i vettori riga vengono indicati con un apice dopo la lettera:

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

Un vettore colonna può essere trasformato in un vettore riga tramite l'operazione della **trasposizione**. La trasposizione è indicata dall'uso dell'apice:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}' = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \end{bmatrix}$$

a' è il vettore trasposto di **a**. Ovviamente, trasponendo un vettore riga si ottiene il vettore colonna di partenza.

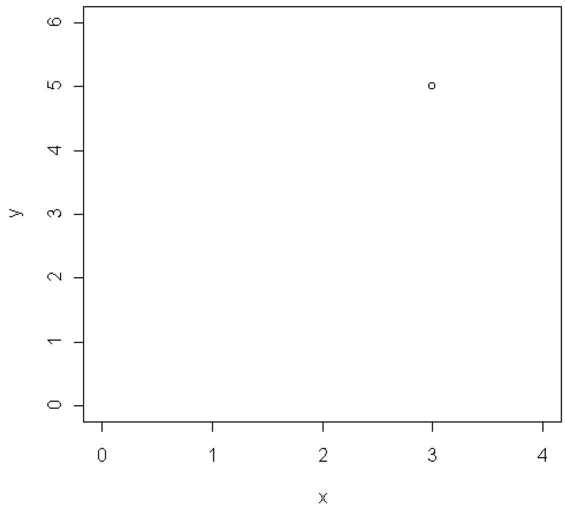
3.1 Rappresentazione grafica

Uno degli usi più comuni dei vettori è quello della rappresentazione numerica di uno spazio geometrico.

Un vettore può essere considerato come un punto nello spazio.

Se un vettore ha dimensione 2, può essere rappresentato graficamente su un piano cartesiano a 2 dimensioni (x e y, ascissa e ordinata), dove ogni elemento corrisponde alla coordinata del punto su uno degli assi dimensionali. La Fig. 1 è la rappresentazione grafica del vettore: $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Figura 1: Grafico del punto corrispondente al vettore **s**



Un vettore di dimensione 3 può quindi rappresentare il corrispondente numerico di un punto in uno spazio a 3 dimensioni (quello a cui siamo normalmente abituati). E un vettore di dimensione n rappresenta numericamente un punto in uno spazio a n dimensioni. Ma se possiamo rappresentare graficamente spazi a 1, 2 o 3 dimensioni, non abbiamo nessun modo di fare lo stesso per 4 o più dimensioni. A questo punto i vettori ci permettono di lavorare in modo teorico (e facilmente) con spazi di qualunque dimensione.

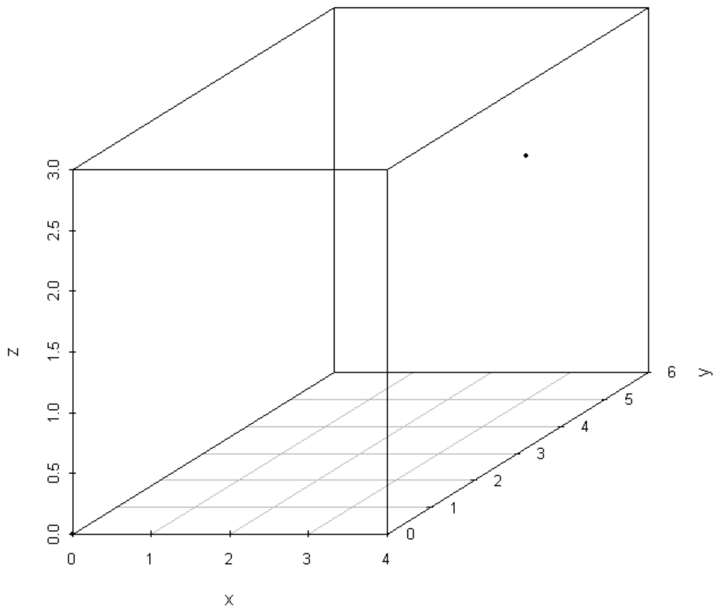
In termini fisici, un vettore è un segmento orientato nello spazio a n dimensioni, che origina all'intersezione di tutti gli assi e termina nel punto corrispondente al vettore numerico. Nel caso di un vettore di ordine 3, $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, avremo il vettore fisico rappresentato in Fig. 2.

3.2 Operazioni possibili con i vettori

È possibile effettuare operazioni tra vettori e tra un vettore e uno scalare (ossia un numero).

Elementi corrispondenti. Si chiamano elementi corrispondenti quegli elementi di due diversi vettori che hanno gli stessi indici, ovvero che occupano la stessa posizione. Ad esempio, 2 è l'elemento del vettore **b** corrispondente all'elemento 12 del vettore **a**:

Figura 2: Grafico del punto corrispondente al vettore $\mathbf{t}$



$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Uguaglianza. Due vettori **a** e **b** si dicono uguali se ogni elemento a_i di **a** è uguale al corrispondente elemento b_i di **b**. Si scrive **a=b**. Se non è vero che ogni elemento di **a** corrisponde al corrispettivo elemento di **b**, si scrive $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Esempio:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Vettore zero. Il **vettore zero** è un vettore in cui tutti gli elementi che lo compongono sono uguali a 0 e viene indicato con uno zero in grassetto.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{0}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vettore unità. Il **vettore unità** è un vettore in cui tutti gli elementi che lo compongono sono uguali a 1 e viene indicato con un 1 in grassetto (oppure, in testi che si rifacciano alla notazione anglosassone, con una **u** in grassetto).

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{1}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vettore opposto. Il **vettore opposto** del vettore **a** è un vettore **-a** i cui elementi hanno lo stesso valore numerico di quelli di **a** ma con segno opposto:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad -\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.2.1 Operazioni con gli scalari

Addizione. Addizionare uno scalare ad un vettore significa sommare lo scalare a ciascuno degli elementi del vettore:

$$x + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x + v_1 \\ x + v_2 \\ \dots \\ x + v_n \end{bmatrix}$$

L'ordine con cui viene effettuata l'operazione non cambia il risultato: $x + \mathbf{v} = \mathbf{v} + x$. Esempi:

$$3 + \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 \\ 3+12 \\ 3+4 \\ 3+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Sottrazione. La sottrazione si può pensare come l'addizione di un numero negativo ad un vettore o l'addizione di uno scalare ad un vettore opposto:

$$x + (-\mathbf{v}) = x - \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} + (-x) = \mathbf{v} - x$$

Ai fini pratici, sottrarre un vettore da uno scalare significa sottrarre allo scalare ciascuno degli elementi del vettore:

$$x + (-\mathbf{v}) = x - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x + (-v_1) \\ x + (-v_2) \\ \dots \\ x + (-v_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - v_1 \\ x - v_2 \\ \dots \\ x - v_n \end{bmatrix}$$

Ai fini pratici, sottrarre uno scalare ad un vettore significa sottrarre lo scalare a ciascuno degli elementi del vettore. Nel caso della sottrazione l'ordine con cui viene effettuata l'operazione cambia il risultato: $x - \mathbf{v} \neq \mathbf{v} - x$.

$$\mathbf{v} + (-x) = \mathbf{v} - x = \begin{bmatrix} v_1 - x \\ v_2 - x \\ \dots \\ v_n - x \end{bmatrix}$$

Esempi:

$$3 - \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-5 \\ 3-12 \\ 3-4 \\ 3-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} - 3 = \begin{bmatrix} 5-3 \\ 12-3 \\ 4-3 \\ 9-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Moltiplicazione. La moltiplicazione fra un vettore e uno scalare produce un vettore i cui elementi sono ciascuno moltiplicati per lo scalare:

$$x \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \times v_1 \\ x \times v_2 \\ \dots \\ x \times v_n \end{bmatrix}$$

L'ordine con cui viene effettuata l'operazione non cambia il risultato: $x \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times x$. Esempi:

$$3 \times \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 5 \\ 3 \times 12 \\ 3 \times 4 \\ 3 \times 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \\ 12 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \times 3 = \begin{bmatrix} 5 \times 3 \\ 12 \times 3 \\ 4 \times 3 \\ 9 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \\ 12 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Valgono le seguenti proprietà:

- commutativa: $k\mathbf{a} = \mathbf{a}k$
- associativa: $k(x\mathbf{a}) = (kx)\mathbf{a}$
- distributiva: $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ e $(k + x)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + x\mathbf{a}$
- $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$: un qualunque vettore moltiplicato per 1, non cambia
- $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$: un qualunque vettore moltiplicato per 0 si annulla
- $-1\mathbf{a} = -\mathbf{a}$: moltiplicando un vettore per -1, si ottiene il vettore opposto

Divisione. In algebra matriciale non esiste una vera e propria divisione fra uno scalare e un vettore, ma è sufficiente lavorare con il reciproco dello scalare. Vale a dire che:

$$\mathbf{v} \div x = \frac{1}{x}\mathbf{v} = \mathbf{v}\frac{1}{x}$$

Esempio:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 3/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.33 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.2.2 Operazioni fra vettori

Addizione. Si possono addizionare fra loro solo vettori che hanno la stessa dimensione (2 vettori colonna o due vettori riga) e l'operazione consiste nell'addizionare gli elementi corrispondenti dei due vettori. Non si possono addizionare fra loro un vettore riga e un vettore colonna.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}' + \mathbf{b}' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{bmatrix}$$

L'ordine dell'operazione non cambia il risultato: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
Esempi:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2 \\ 3+4 \\ 5+5 \\ 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2 & 3+4 & 5+5 & 2+3 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

L'addizione fra vettori ha alcune proprietà:

- proprietà commutativa: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- proprietà associativa: $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
- qualunque vettore riga (o colonna) se viene sommato al corrispondente vettore zero, non cambia: $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$
- la somma di un vettore (**a**) con il suo opposto (**-a**) produce il vettore zero: $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$

Sottrazione. Anche in questo caso, la sottrazione è in realtà un'addizione con un vettore opposto **a+(-1b)**. Di conseguenza, si possono sottrarre fra loro solo vettori che hanno la stessa dimensione (e lo stesso orientamento, cioè due vettori riga o due vettori colonna) e l'operazione consiste nel sottrarre gli elementi corrispondenti dei due vettori. Essendo una sottrazione, l'ordine degli operandi è importante: $\mathbf{a} - \mathbf{b} \neq \mathbf{b} - \mathbf{a}$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \cdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + (-1)\mathbf{a} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \cdots \\ b_n - a_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}' - \mathbf{b}' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{bmatrix}$$

Esempi:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2 \\ 3-4 \\ 5-5 \\ 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-4 \\ 4-3 \\ 5-5 \\ 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Moltiplicazione. La moltiplicazione fra due vettori è possibile solo fra vettori riga e vettori colonna (o viceversa) purché della stessa dimensione.

Il risultato dell'operazione fra un vettore riga e un vettore colonna è uno scalare. Ogni elemento del primo vettore viene moltiplicato per il corrispondente elemento del secondo vettore ed, infine, i prodotti vengono sommati fra loro.

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1(b_1) + a_2(b_2) + \cdots + a_n(b_n)$$

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1(2) + 2(1) + -1(3) = 2 + 2 + (-3) = 1$$

Non è possibile moltiplicare fra loro due vettori riga o due vettori colonna. Tuttavia, quando si parla di **prodotto scalare** (o *prodotto interno*) fra due vettori, si intende che la *trasposta* del primo vettore viene moltiplicata per il secondo vettore, ovvero che il *prodotto scalare* di **a** e **b** è **a'b**. In questo modo il prodotto scalare di un vettore per se stesso, permette di calcolare la somma dei quadrati degli elementi $\sum x^2$, in quanto ogni elemento viene moltiplicato per se stesso e quindi sommato agli altri:

$$\mathbf{x}'\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2(2) + 1(1) + 3(3) = 4 + 1 + 9 = 14$$

E il prodotto scalare del vettore unità con un vettore **a**, permette di calcolare la somma degli elementi $\sum x$, infatti ogni elemento viene moltiplicato per 1 e sommato agli altri:

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1(2) + 1(1) + 1(3) = 2 + 1 + 3 = 6$$

Un particolare tipo di moltiplicazione fra vettori è quello fra un vettore colonna e un vettore riga (*prodotto esterno*), ma il risultato di questa operazione è una matrice. Per cui affronteremo questa operazione più avanti (p. 18).

A volte, ai termini che indicano la moltiplicazione, si fanno precedere dai prefissi *pre-* e *post-*. Per la moltiplicazione **a'a**, si può dire che il vettore **a'** pre-moltiplica **a** oppure che il vettore **a** viene post-moltiplicato ad **a'**.

3.3 Esercizi

Calcolare:

a) $2 + \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $1,5 \times \begin{bmatrix} 0,3 \\ 2,1 \\ 1,5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} - 5$

d) $\begin{bmatrix}3.2\\4.3\\2.7\\3.8\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1.8\\0.7\\2.3\\1.2\end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix}4\\5\\6\\7\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}7\\6\\5\\4\end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$

4 Matrici

4.1 Definizione di una matrice

Una matrice è un insieme ordinato di numeri disposti in righe e colonne, come una tabella. Ecco alcuni esempi numerici di matrici:

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 6\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3 & 4 & 5 & -1\\7 & 3 & 2 & 6\\6 & 1 & 6 & 3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2\\6\\8\end{bmatrix}$$

Potete pensare a una matrice come un insieme di vettori riga o di vettori colonna oppure ai vettori come a delle matrici composte da una sola riga o da una sola colonna.

Più in generale una matrice viene indicata formalmente come:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{bmatrix}$$

In questo caso, si tratta di un insieme ordinato di 3 righe e 4 colonne e viene chiamata una matrice rettangolare. E ancor più in generale, una matrice può essere indicata come:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\\vdots & \dots & \vdots\\a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

In questo caso, m e n indicano rispettivamente il numero di righe e di colonne di cui è composta la matrice. La matrice viene anche indicata con una lettera maiuscola in grassetto. Le dimensioni della matrice (numero di righe e di colonne) sono indicate come $m \times n$ in cui m (il primo indice) indica il numero di righe e n (il secondo indice) il numero di colonne. Le dimensioni delle tre matrici numeriche di esempio sono, rispettivamente, 2×2, 3×4, 3×1. Per indicare una matrice di una certa dimensione si può usare $\mathbf{A} : n \times m$ oppure $\mathbf{A}_{n \times m}$.

Le parentesi quadre indicano usualmente la matrice, ma è possibile trovare matrici indicate con parentesi tonde o doppie righe verticali.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \qquad \begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{Vmatrix}$$

Poiché le matrici sono insiemi ordinati di numeri posti su righe e colonne (tabelle), si utilizza un sistema duplice di indici per identificare gli elementi della matrice: il primo indice corrisponde alla riga e il secondo alla colonna. L'elemento a_{23} è l'elemento che si trova all'incrocio fra la riga 2 e la colonna 3; l'elemento a_{ij} è l'elemento che si trova all'incrocio fra la riga i e la colonna j, dove i e j indicano genericamente una qualunque riga o una qualunque colonna. Per questo motivo è possibile indicare una matrice anche in forma (super-)abbreviata:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]$$

Un vettore può essere quindi considerato come una matrice che ha una delle due dimensioni uguali a 1. Un vettore riga è una matrice $1 \times n$, mentre un vettore colonna è una matrice $m \times 1$.

Uno scalare può essere considerato come una matrice di dimensione 1×1.

In ambito statistico, una tabella di dati può essere considerata come una matrice e una matrice può essere usata per lavorare con una tabella dati.

4.2 Rappresentazione grafica

Se un vettore di ordine n può essere considerato come un punto nello spazio a n dimensioni, una matrice può rappresentare un'insieme di punti.

[AMPLIARE]

4.3 Matrice trasposta

La trasposta di una matrice **A** è un'altra matrice **A'**, derivata scambiando le righe con le colonne, in modo che la *riga i* diventi la *colonna i* della trasposta. In altre parole, ogni vettore riga di una matrice diventa un vettore colonna della trasposta.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Se la dimensione di una matrice è $n \times m$, la sua trasposta sarà $m \times n$. La trasposta della trasposta corrisponde alla matrice di partenza:

$$(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$$

4.4 Operazioni possibili con le matrici

Sulle matrici si possono eseguire le operazioni dell'addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione per uno scalare, con vettori o con altre matrici.

Elementi corrispondenti. Gli elementi di due matrici diverse che hanno gli stessi indici, si chiamano corrispondenti perché occupano la stessa posizione. Ad esempio:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

L'elemento $a_{21} = 13$ della matrice **A** è corrispondente all'elemento $b_{21} = 3$ della matrice **B**, perché hanno la stessa posizione, indicata dagli stessi indici di riga e colonna (21).

Uguaglianza. Due matrici **A** e **B** (di uguali dimensioni) si dicono uguali se ogni elemento a_{ij} di **A** è uguale ad ogni corrispondente elemento b_{ij} di **B**. Si scrive **A=B**. Se non è vero che ogni elemento di **A** corrisponde al corrispettivo elemento di **B**, si scrive $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$. Esempio:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice opposta o negativa. La **matrice negativa** di **A** è la matrice **-A** i cui elementi corrispondenti sono uguali a quelli di **A** ma di segno opposto.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad -\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

4.4.1 Operazioni con gli scalari

Le operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare godono della proprietà commutativa (ovvero $x + \mathbf{A} = \mathbf{A} + x$ e $x\mathbf{A} = \mathbf{A}x$), mentre sottrazione e divisione, no.

Addizione. L'addizione fra uno scalare e una matrice, produce una matrice i cui elementi sono tutti addizionati allo scalare:

$$x + \mathbf{A} = x + [a_{ij}] = \begin{bmatrix} x + a_{11} & \cdots & x + a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x + a_{m1} & \cdots & x + a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esempio:

$$3 + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3+4 \\ 3+5 & 3+6 & 3+7 & 3+8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

Sottrazione Anche in questo caso, la sottrazione fra uno scalare e una matrice può essere pensata come l'addizione con una matrice opposta. Produce una matrice i cui elementi sono il risultati della sottrazione fra lo scalare e l'elemento stesso. La sottrazione non gode della proprietà commutativa, per cui l'ordine con cui viene effettuata l'operazione produce risultati diversi ($x - \mathbf{A} \neq \mathbf{A} - x$), in quanto è l'addizione con due operandi diversi.

$$x + (-\mathbf{A}) = x - [a_{ij}] = \begin{bmatrix} x - a_{11} & \cdots & x - a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x - a_{m1} & \cdots & x - a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + (-x) = [a_{ij}] - x = \begin{bmatrix} a_{11} - x & \cdots & a_{1n} - x \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} - x & \cdots & a_{mn} - x \end{bmatrix}$$

Esempi:

$$3 - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 & 3-2 & 3-3 & 3-4 \\ 3-5 & 3-6 & 3-7 & 3-8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix} - 3 = \begin{bmatrix}1-3 & 2-3 & 3-3 & 4-3\\5-3 & 6-3 & 7-3 & 8-3\end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0 & 1\\2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

Notate i risultati delle due operazioni; gli elementi corrispondenti hanno segno opposto.

Moltiplicazione La moltiplicazione fra uno scalare e una matrice produce una matrice i cui elementi sono il risultato della moltiplicazione fra lo scalare e l'elemento stesso.

$$x * \mathbf{A} = x * [a_{ij}] = \begin{bmatrix}x * a_{11} & \cdots & x * a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x * a_{m1} & \cdots & x * a_{mn}\end{bmatrix}$$

Esempio:

$$3 * \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3*1 & 3*2 & 3*3 & 3*4\\3*5 & 3*6 & 3*7 & 3*8\end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix}3 & 6 & 9 & 12\\15 & 18 & 21 & 24\end{bmatrix}$$

Valgono le stesse proprietà valide fra uno scalare e un vettore (v. pag. 8):

- associativa: $k(x\mathbf{A}) = (kx)\mathbf{A}$
- distributiva: $k(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})k$ e $(k+x)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + x\mathbf{A}$
- $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$: una qualunque matrice moltiplicata per 1, non cambia
- $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$: una matrice moltiplicata per 0 si annulla
- $-1 \times \mathbf{A} = -\mathbf{A}$: moltiplicando una matrice per -1, si ottiene la matrice opposta o negativa, in quanto ogni elemento cambia di segno.

Divisione Anche in questo caso, la divisione fra uno scalare e una matrice si ottiene tramite la moltiplicazione con l'inverso dello scalare.

$$\mathbf{A} \div x = \frac{1}{x}[a_{ij}] = \begin{bmatrix}\frac{1}{x}a_{11} & \cdots & \frac{1}{x}a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{x}a_{m1} & \cdots & \frac{1}{x}a_{mn}\end{bmatrix}$$

Esempio:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3 & 2/3 & 3/3 & 4/3\\5/3 & 6/3 & 7/3 & 8/3\end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix}0.333 & 0.667 & 1 & 1.333\\1,667 & 2 & 2,333 & 2,667\end{bmatrix}$$

4.4.2 Operazioni fra vettori e matrici

Abbiamo visto che un vettore può essere considerato una matrice in cui una delle due dimensioni è uguale a 1. In tal caso (e diventerà chiaro nella prossima sezione), l'unica operazione possibile è la moltiplicazione fra un vettore e una matrice (o viceversa) purché siano valide le condizioni di compatibilità. Poiché questo tipo di operazione è solo un caso particolare della moltiplicazione fra matrici, la affronteremo più oltre.

4.4.3 Operazioni fra matrici

Anche fra matrici si possono eseguire operazioni, purché le dimensioni delle matrici siano fra loro compatibili.

Addizione. La somma di due matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ aventi lo stesso numero di righe e di colonne (cioè la stessa dimensione) è una matrice $\mathbf{C}$ i cui elementi sono la somma dei corrispondenti elementi di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{B}$.

$$\underset{n\times m}{\mathbf{A}} + \underset{n\times m}{\mathbf{B}} = \underset{n\times m}{\mathbf{C}}$$

Si può scrivere, per qualunque elemento di $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = [c_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

Se le due matrici non sono dello stesso ordine (ovvero non hanno le stesse dimensioni), l'operazione non si può eseguire e si dice che le matrici non sono *compatibili* o *conformabili*.

L'ordine con cui vengono sommate le matrici non è importante:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 4+5 \\ 1+4 & 3+2 & 5+1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Le proprietà dell'addizione sono:

- commutativa: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- associativa: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}' + \mathbf{C}'$: la trasposta di una somma è uguale alla somma delle trasposte

Sottrazione. La sottrazione è analoga all'addizione, in quanto possiamo pensare alla sottrazione come all'addizione di una matrice $\mathbf{A}$ con l'opposta di $\mathbf{B}$ (cioè **-B**), per cui per qualunque elemento di $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = [c_{ij}] = \mathbf{A} + (-1 \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} - \mathbf{B} = [a_{ij}] - [b_{ij}]$$

Anche in questo caso, se le due matrici non sono dello stesso ordine, l'operazione non si può eseguire.

L'ordine con cui vengono sottratte le matrici è importante, in quanto

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} \neq \mathbf{B} - \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} - b_{m1} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_{11} - a_{11} & \cdots & b_{1n} - a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} - a_{m1} & \cdots & b_{mn} - a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esempi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 & 4-5 \\ 1-4 & 3-2 & 5-1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-2 & 5-4 \\ 4-1 & 2-3 & 1-5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Da quanto detto sopra, risulta che se **A+B=0** allora dev'essere **B=-A** ovvero che **B** è l'opposta di **A**.

Moltiplicazione. E' possibile moltiplicare due matrici fra loro se, e solamente se, il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda, ovvero se la dimensione di **A** è $n \times m$ e quella di **B** è $m \times p$. La matrice risultante avrà dimensioni corrispondenti alle righe della prima e alle colonne della seconda, ovvero $n \times p$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & * & \mathbf{B} & = & \mathbf{C} \\ n \times m & & m \times p & & n \times p \end{array}$$

La matrice risultato **C** si ottiene moltiplicando ogni vettore riga di **A** per ogni vettore colonna di **B**. Se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix}$$

La matrice **C** avrà n righe e p colonne:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{bmatrix}$$

Il primo elemento, il c_{11}, si ottiene con la sommatoria dei prodotti degli elementi corrispondenti del primo vettore riga di **A** con il primo vettore colonna di **B**:

$$c_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} =$$

$$c_{11} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} + a_{13} * b_{31} + \cdots + a_{1m} * b_{m1}$$

E l'ultimo elemento della matrice **C**, il c_{np}, si ottiene dalla moltiplicazione dell'ultimo vettore riga di **A** con l'ultimo vettore colonna di **B**:

$$c_{np} = \begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \dots \\ b_{mp} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{n1} * b_{1p} + a_{n2} * b_{2p} + a_{n3} * b_{3p} + \cdots + a_{nm} * b_{mp}$$

Notate che, ogni volta, gli elementi che vengono moltiplicati fra loro hanno lo stesso indice interno ($a_{n2} * b_{2p}$, in questo caso il 2).

Un esempio numerico può essere più esplicativo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché **A** è una matrice 3×4 e **B** 4×2, la matrice **C** avrà ordine 3×2. I singoli elementi si ottengono come segue:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= 1 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times (-2) && = 1 + 6 + 6 - 2 \\
c_{12} &= 1 \times 3 + 3 \times 1 + 2 \times 4 + 1 \times 1 && = 3 + 3 + 8 + 1 \\
c_{21} &= -1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 5 \times (-2) && = -1 + 4 + 9 - 10 \\
c_{22} &= -1 \times 3 + 2 \times 1 + 3 \times 4 + 5 \times 1 && = -3 + 2 + 12 + 5 \\
c_{31} &= 3 \times 1 + 4 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times (-2) && = 3 + 8 + 3 - 4 \\
c_{32} &= 3 \times 3 + 4 \times 1 + 1 \times 4 + 2 \times 1 && = 9 + 4 + 4 + 2
\end{aligned}$$

La matrice **C** sarà quindi:

$$\begin{bmatrix} 11 & 15 \\ 2 & 16 \\ 10 & 19 \end{bmatrix}$$

Un'altro modo per indicare la moltiplicazione fra matrici è:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = [c_{ij}] = \sum a_{ik} b_{kj}$$

Si può capire perché la moltiplicazione di due matrici è possibile soltanto quando il numero di righe della matrice da moltiplicare è uguale al numero di colonne della matrice moltiplicativa. Ne segue che **AB** non è uguale a **BA** se le matrici sono rettangolari. In tal caso **BA** potrebbe non essere neppure calcolabile. Se la matrice **A** è di ordine 2×3 ($\mathbf{A}_{2\times 3}$) e $\mathbf{B}_{3\times 2}$, allora **BA** è possibile e sarà di dimensione 3×3. Mentre se $\mathbf{A}_{2\times 3}$ e $\mathbf{B}_{3\times 4}$, allora **BA** *non è conformabile*. Se invece le matrici sono quadrate e dello stesso ordine (ossia $n \times n$), **BA** è possibile, ma $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1(3) + 3(-2) & 1(4) + 3(1) \\ 2(3) + 1(-2) & 2(4) + 1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 6 & 4 + 3 \\ 6 - 2 & 8 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 3(1) + 4(2) & 3(3) + 4(1) \\ -2(1) + 1(2) & -2(3) + 1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 8 & 9 + 4 \\ -2 + 2 & -6 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Nella sezione sui vettori abbiamo presentato la moltiplicazione fra vettori riga per vettori colonna, il cui risultato è uno scalare. Dovrebbe essere chiaro ora perché non è possibile moltiplicare fra loro due vettori riga (o due vettori colonna). E' invece possibile moltiplicare un vettore colonna per un vettore riga, ma il risultato è una matrice.

$$\underset{1\times m}{\mathbf{a}'} * \underset{m\times 1}{\mathbf{b}} = \underset{1\times 1}{c} \quad \text{mentre} \quad \underset{m\times 1}{\mathbf{b}} * \underset{1\times m}{\mathbf{a}'} = \underset{m\times m}{\mathbf{C}}$$

L'operazione di moltiplicazione è la stessa: ogni riga del vettore moltiplicatore viene moltiplicata per ogni colonna del secondo vettore. Solo che in questo caso è uno scalare moltiplicato per un'altro scalare.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_2b_4 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 \end{bmatrix}$$

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-1) & 2(3) & 2(0) & 2(2) \\ 3(-1) & 3(3) & 3(0) & 3(2) \\ 4(-1) & 4(3) & 4(0) & 4(2) \\ 5(-1) & 5(3) & 5(0) & 5(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 & 4 \\ -3 & 9 & 0 & 6 \\ -4 & 12 & 0 & 8 \\ -5 & 15 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Proprietà. Si può osservare che, per quanto riguarda la moltiplicazione, le seguenti proprietà sono soddisfatte (le prime due derivano dall'algebra dei numeri):

a) associativa, $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC}$: l'ordine con cui si moltiplicano fra loro le prime due matrici non influisce sul risultato finale (è implicito che le matrici devono avere le dimensioni giuste per poter essere moltiplicate fra loro);

b) distributiva, $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$: la moltiplicazione di una matrice $\mathbf{A}$ per la somma di due matrici $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, equivale a sommare il prodotto di ciascuna delle matrici $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ per la matrice $\mathbf{A}$;

c) $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$: la trasposta di un prodotto è uguale al prodotto delle trasposte (ma in ordine inverso).

Valgono anche le normali regole delle potenze, ovviamente per matrici conformabili:

a) $\mathbf{AA} = \mathbf{A^2}$

b) $\mathbf{A^m A^n} = \mathbf{A^{m+n}}$

c) $(\mathbf{A^m})^{\mathbf{n}} = (\mathbf{A^n})^{\mathbf{m}} = \mathbf{A^{mn}}$

4.4.4 Combinazione lineare

Se $\mathbf{b}$ è un vettore (ad es. di ordine 2) e $\mathbf{A}$ una matrice (ad es. di ordine 3×2), il prodotto $\mathbf{Ab}$ può essere sviluppato come:

$$b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + b_3A_{i3}$$

in quanto

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1a_{11} + b_2a_{12} \\ b_1a_{21} + b_2a_{22} \\ b_1a_{31} + b_2a_{32} \end{bmatrix}$$

Il prodotto $\mathbf{Ab}$ è chiamato combinazione lineare del vettore $\mathbf{b}$ con la matrice $\mathbf{A}$.

Più in generale, se $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ sono dei vettori e i, j, k ed l sono degli scalari, la somma dei prodotti fra gli scalari e i vettori è chiamata *combinazione lineare*:

$$i\mathbf{x} + j\mathbf{y} + k\mathbf{w} + l\mathbf{z}$$

ed è considerata come la somma pesata dei vettori. Per cui, una retta di regressione multipla del tipo:

$$Y_i = b_1 X_{i1} + b_2 X_{i2} + \cdots + b_m X_{im}$$

è una combinazione lineare fra gli scalari b racchiusi nel vettore $\mathbf{b}$ e i vettori $\mathbf{X_k}$ raccolti nella matrice $\mathbf{X}$.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & & X_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

4.5 Matrice quadrata

Si definisce come matrice quadrata una matrice che ha lo stesso numero di righe e di colonne. La dimensione di una matrice quadrata è indicata con un solo numero e si dice di ordine n.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 7 & 2 & 6 \\ 6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2 \times 2 \qquad\qquad 3 \times 3$$

In una matrice quadrata ci sono 2 due diagonali e la diagonale che va dall'elemento a_{11} fino all'elemento a_{nn} (ovvero che hanno indice uguale) si chiama **diagonale principale**. La somma degli elementi sulla diagonale principale si chiama **traccia** della matrice:

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_i a_{ii}$$

La traccia delle due matrici precedenti è:

$$tr(\mathbf{A}) = 1 + 6 = 7$$

$$tr(\mathbf{B}) = 3 + 2 + 3 = 8$$

4.5.1 Matrice simmetrica

E' una *matrice quadrata* che, se viene trasposta, non cambia ovvero $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$. In pratica, rispetto alla diagonale principale, le due metà sono fra loro speculari. Ecco un esempio di matrice simmetrica:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

In questa matrice gli elementi con indici speculari sono uguali fra loro ($a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$, ...).

Un esempio di matrice simmetrica è la matrice delle correlazioni. Ipotizziamo di avere 4 variabili e di calcolare la correlazione lineare di Pearson fra tutte le variabili. Inseriamo ora le 6 correlazioni in una struttura matriciale: le righe e le colonne indicheranno le variabili mentre i singoli elementi corrisponderanno alle correlazioni. Ovviamente, poiché la correlazione fra x e y è uguale a quella fra y e x, la matrice sarà simmetrica.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1.00 & .70 & .19 & .55 \\ .70 & 1.00 & .36 & .50 \\ .19 & .36 & 1.00 & .16 \\ .55 & .50 & .16 & 1.00 \end{bmatrix}$$

4.5.2 Matrice diagonale

E' una *matrice quadrata simmetrica*, in cui vengono utilizzati solo i valori lungo la diagonale principale; tutti gli altri elementi sono nulli. La diagonale può contenere qualunque scalare, anche 0 e 1.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Moltiplicare una qualunque matrice per una matrice diagonale (o viceversa) equivale a moltiplicare un elemento della matrice per quello della diagonale, in quanto viene usato solo l'elemento diverso da zero.

$$\mathbf{DA} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times 2 & 4 \times 4 \\ 2 \times 3 & 2 \times 5 \\ 3 \times 3 & 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 6 & 10 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AD} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 4 & 4 \times 2 & 3 \times 3 \\ 3 \times 4 & 5 \times 2 & 2 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 9 \\ 12 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

A volte, gli elementi 0 (zero) della parte superiore destra e inferiore sinistra possono essere interamente omessi (facilitando la lettura). Scrivendo la matrice a mano, si può usare un solo 0 sottolineato ($\underline{0}$) anziché riempire tutta l'area.

4.5.3 Matrice scalare

E' una *matrice quadrata simmetrica diagonale* in cui tutti gli elementi della diagonale principale sono uguali fra loro:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

4.5.4 Matrice identica

La *matrice identica* o *identità* è una *matrice quadrata simmetrica diagonale scalare* i cui elementi sono tutti 0 con l'eccezione della diagonale i cui elementi sono invece uguali a 1.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si indica con la lettera $\mathbf{I}$ oppure con $\mathbf{I}_n$, in cui n indica l'ordine della matrice, ovvero il numero di righe e di colonne.

La traccia di una matrice identica è N (ovvero corrisponde all'ordine della matrice).

$$tr(I_4) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

La sua funzione in algebra matriciale è analogo a quello del valore scalare 1 nell'algebra normale. In algebra, il numero 1 è quello che moltiplicato per un qualunque altro numero, non lo modifica: $1 \times x = x$. Allo stesso modo la matrice *identità* moltiplicata per una qualunque altra matrice non la modifica.

$$\mathbf{IA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+0(4) & 1(3)+0(6) \\ 0(1)+1(4) & 0(3)+1(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Avendo una matrice $\mathbf{A}_{n\times m}$ è possibile definire il prodotto $\mathbf{A}_{n\times m}\mathbf{I}_m$ e anche $\mathbf{I}_n\mathbf{A}_{n\times m}$, ma non è invece possibile, in generale, individuare il prodotto $\mathbf{I}_m\mathbf{A}_{n\times m}$. Si noti anche che $\mathbf{A}_{n\times m}\mathbf{I}_m = \mathbf{I}_n\mathbf{A}_{n\times m} = \mathbf{A}$.

Moltiplicando $\mathbf{I}$ per uno scalare si ottiene una matrice scalare in cui i valori della diagonale vengono sostituiti dallo scalare stesso, ovvero *una matrice scalare.*

$$3 \times \mathbf{I} = 3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(0) \\ 3(0) & 3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4.5.5 Matrice triangolare

E' una *matrice quadrata* in cui una delle due metà è nulla, in genere quella superiore. Ecco un esempio di matrice triangolare:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

4.5.6 Matrice ortogonale*

Una matrice quadrata si dice ortogonale se è vero che

$$\mathbf{AA}' = \mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

cioè se la moltiplicazione fra la matrice e la sua trasposta (o viceversa) origina la matrice identica.

Inoltre, il prodotto di due matrici ortogonali $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ è ancora una matrice ortogonale, infatti:

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})' = \mathbf{ABB}'\mathbf{A}' = \mathbf{AIA}' = \mathbf{AA}' = \mathbf{I}$$

4.5.7 Matrici congruenti*

Si chiamano congruenti due matrici quadrate $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ dello stesso ordine, per cui esista una matrice $\mathbf{C}$ che rende vera l'uguaglianza:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}'\mathbf{BC}$$

4.6 Matrice nulla o matrice zero

E' una matrice in cui tutti gli elementi sono uguali a 0:

$$\emptyset_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matrice quadrata nulla è anche simmetrica e diagonale.
La matrice nulla svolge le stesse funzioni dello 0 (zero) in algebra scalare:

a) $\mathbf{A} + \emptyset = \emptyset + \mathbf{A} = \mathbf{A}$; sommando (o sottraendo) la matrice nulla a una qualunque altra matrice, quest'ultima non cambia;

b) $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \emptyset$; una matrice sottratta a se stessa, origina la matrice nulla;

c) $\mathbf{A}\emptyset = \emptyset$; la matrice nulla moltiplicata per una qualunque matrice, produce la matrice nulla.

Si noti tuttavia che $\mathbf{AB} = \emptyset$ non implica che $\mathbf{A}$ o $\mathbf{B}$ siano necessariamente matrici nulle.

4.7 Esercizi

a) Scrivere la trasposta di

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Qual è l'elemento di $\mathbf{B}$ corrispondente all'elemento 5 di $\mathbf{A}$?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 & 0,9 \\ 0,3 & 0,7 & 0,6 \end{bmatrix}$$

c) Le matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono uguali? e $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Calcolare

$$4 + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e) Calcolare

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 2$$

f) Calcolare

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} * 1,5$$

g) Calcolare

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

h) Calcolare

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

i) Calcolare

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

j) Calcolare

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

k) Calcolare

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

5 Determinante di una matrice

Per ogni matrice quadrata $\mathbf{A}$ (e solo per una matrice quadrata) esiste un valore che si può individuare a partire dagli elementi della matrice e che si chiama *determinante di* $\mathbf{A}$. Tale numero si indica di solito con $det(\mathbf{A})$ o con $|\mathbf{A}|$.

Per una matrice 1×1,

$$|\mathbf{A}| = a$$

ovvero il determinante di $\mathbf{A}_1$ è semplicemente l'elemento a che compone la matrice. Per una matrice 2×2 il determinante si individua nel modo seguente:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

cioè il prodotto della diagonale principale meno il prodotto della diagonale secondaria.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$$

Per una matrice 3×3, il calcolo del determinante diventa:

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{12}b_{21}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32}$$

ovvero la somma dei prodotti degli elementi in direzione della diagonale principale meno il prodotto degli elementi sulla direzione della diagonale secondaria, usando ogni volta un solo elemento in ogni riga e in ogni colonna.

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} (3)(2)(3) + (2)(2)(3) + \\ +(1)(1)(1) - (1)(2)(3) - \\ +(2)(1)(3) - (3)(2)(1) = 13 \end{bmatrix}$$

Il metodo per individuare il determinante di una matrice dipende di volta in volta, dall'ordine della matrice, anche se esistono delle regole che permettono di generalizzare tale metodo (cfr. Zwirner, 1963).

Ne prenderò in considerazione due: la regola che abbiamo appena visto e quella che utilizza i minori e i cofattori.

La regola più generale può essere divisa in due parti e prevede che, per una matrice di ordine m:

- si sommino tutti i possibili prodotti di m elementi in modo tale che uno e un solo elemento venga preso da ciascuna riga e uno e uno solo da ciascuna colonna (tutte le possibili permutazioni, $n!$);
- il prodotto così calcolato avrà segno positivo o negativo secondo l'ordine degli indici di colonna (orario o antiorario).

Prendiamo in considerazione la formula per il calcolo del determinate di una matrice 3×3:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Verifichiamo la prima parte della regola generale. Potete vedere che per i primi tre prodotti (quelli positivi), i tre elementi vengono ciascuno da una sola riga e da una sola colonna ovvero ciascun indice compare 1 e 1 sola volta in posizione di riga e 1 e 1 sola volta in posizione di colonna:

$$\begin{bmatrix} 11 & & \\ & 22 & \\ & & 33 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & 12 & \\ & & 23 \\ 31 & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & & 13 \\ 21 & & \\ & 32 & \end{bmatrix}$$

Analogamente per quelli negativi:

$$\begin{bmatrix} & & 13 \\ & 22 & \\ 31 & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & 12 & \\ 21 & & \\ & & 33 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11 & & \\ & & 23 \\ & 32 & \end{bmatrix}$$

Consideriamo adesso la seconda regola e prendiamo in considerazione gli indici di colonna, muovendoci da sinistra a destra e dall'alto in basso. Consideriamo gli indici da 1 a n come se fossero le ore di un orologio, per cui giunti ad n si torna ad 1. Per i tre prodotti con segno positivo, la sequenza è sempre oraria: 123, 231 e 312. Al contrario in quelli negativi vi sono delle inversioni ovvero dei movimenti antiorari (indicate tra parentesi quadre): [321], [21]3 e 1[32].

Ovviamente, se n è l'ordine della matrice saranno necessari $n!$ prodotti; ad esempio, per una matrice di ordine 4, serviranno $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ prodotti. E' quindi evidente come l'operazione diventi subito complessa.

Per il secondo metodo per il calcolo del determinante, bisogna prima definire i concetti di *minore* e di *cofattore*.

5.1 Minori di una matrice

Chiamiamo "submatrice di **A**", una qualunque matrice ottenuta cancellando almeno una riga e una colonna di **A**. Il determinante di una qualunque submatrice di una matrice **A**, si chiama "minore della matrice **A**". Negli esempi immediatamente precedenti, i singoli elementi sono "minori di primo ordine", mentre le submatrici qui sotto riportate sono minori di secondo ordine della matrice **B** (3×3) dell'esempio precedente.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$a \qquad\qquad b \qquad\qquad c$$

La submatrice a è ottenuta cancellando la terza riga e la terza colonna di $\mathbf{B}$, la submatrice b cancellando la prima riga e la prima colonna, la submatrice c cancellando la seconda riga e la prima colonna.

Si chiama allora, *minore di ordine k* di una matrice, il determinante che si ottiene considerando solo k righe e k colonne della matrice stessa. Se la matrice ha dimensione $m \times n$ (cioè è rettangolare), k non può essere maggiore del minimo fra m e n.

5.2 Cofattore

Un cofattore è *un minore con segno* e il segno dipende dalla sua posizione nella matrice. Immaginate la matrice come una scacchiera in cui, al posto del bianco e del nero, usiamo i segni più e meno alternati.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

In alternativa basta sommare gli indici dell'elemento: se il risultato è pari, il cofattore è positivo; se dispari, negativo.

Il minore calcolato sulla base dell'elemento a_{21} avrà segno negativo, quello calcolato sulla base dell'elemento a_{13} positivo...

Il minore calcolato sulla base di un elemento è il minore che si ottiene cancellando la riga e la colonna dell'elemento. Per cui il cofattore di b_{21} si ottiene eliminando la riga 2 e la colonna 1 della matrice $\mathbf{B}$, inoltre il minore avrà segno negativo.

$$-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

5.3 Determinante calcolato con minori e cofattore

Scegliamo una qualunque riga (o colonna) di una matrice e moltiplichiamo ogni elemento di quella riga (o colonna) per il suo cofattore e quindi sommiamo tutti i prodotti. Facciamo un esempio con la stessa matrice di prima:

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Per calcolare il determinante, prendiamo in considerazione la prima riga: moltiplichiamo ogni elemento di quella riga per il cofattore corrispondente:

$$\begin{array}{llllll} 3\times & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & = +3(2 \times 3 - 2 \times 1) & = 3(4) & = 12 \\ \\ 2\times & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & = -2(1 \times 3 - 2 \times 3) & = -2(-3) & = +6 \\ \\ 1\times & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & = +1(1 \times 1 - 2 \times 3) & = 1(-5) & = -5 \\ \\ elemento & cofattore & & & \end{array}$$

Sommando 12+6-5=13 otteniamo il determinante, cioè il valore che avevamo già calcolato in precedenza. Per verificare meglio il procedimento, rifacciamolo per la seconda colonna:

$$
\begin{array}{lllll}
2\times & -\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 3\end{vmatrix} & = -2(1\times 3 - 2\times 3) & = -2(-3) & = +6 \\[2ex]
2\times & +\begin{vmatrix}3 & 1\\3 & 3\end{vmatrix} & = +2(3\times 3 - 1\times 3) & = +2(6) & = +12 \\[2ex]
1\times & -\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} & = -1(3\times 2 - 1\times 1) & = -1(5) & = -5 \\[2ex]
elemento & cofattore & & &
\end{array}
$$

e ancora, sommando 6+12-5 otteniamo 13, che è il determinante.

Con una matrice di ordine 4 le cose si complicano un po'.

$$
|\mathbf{C}| = \begin{vmatrix}1 & 3 & 7 & 2\\4 & 2 & 1 & 5\\3 & 1 & 4 & 2\\5 & 1 & 3 & 2\end{vmatrix}
$$

Usiamo la prima riga per il calcolo dei minori.

$$
+1\begin{vmatrix}2 & 1 & 5\\1 & 4 & 2\\1 & 3 & 2\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}4 & 1 & 5\\3 & 4 & 2\\5 & 3 & 2\end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix}4 & 2 & 5\\3 & 1 & 2\\5 & 1 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\3 & 1 & 4\\5 & 1 & 3\end{vmatrix} =
$$

e poi di nuovo in modo ricorsivo

$$
1\left(2\begin{vmatrix}4 & 2\\3 & 2\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}1 & 4\\1 & 3\end{vmatrix}\right) - 3\left(4\begin{vmatrix}4 & 2\\3 & 2\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}3 & 2\\5 & 2\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}3 & 4\\5 & 3\end{vmatrix}\right) +
$$

$$
+7\left(4\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}3 & 2\\5 & 2\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}3 & 1\\5 & 1\end{vmatrix}\right) - 2\left(4\begin{vmatrix}1 & 4\\1 & 3\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}3 & 4\\5 & 3\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}3 & 1\\5 & 1\end{vmatrix}\right)
$$

a questo punto possiamo sostituire i minori di ordine 2 con il loro determinante

$$
= 1[2(4\times 2 - 2\times 3) - 1(1\times 2 - 2\times 1) + 5(1\times 3 - 4\times 1)]
$$

$$
-3[4(8-6) - 1(6-10) + 5(9-20)] + 7[4(2-2) - 2(6-10) + 5(3-5)]
$$

$$
-2[4(3-4) - 2(9-20) + 1(3-5)] = 82
$$

Il determinante di una matrice diagonale coincide con la traccia della matrice:

$$
A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}
$$

$$
tr(\mathbf{A}) = 1\times 2\times 3 = 6 \qquad |\mathbf{A}| = 1\times 2\times 3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 6
$$

5.4 Proprietà dei determinanti*

I determinanti hanno alcune proprietà fondamentali.

1. Due matrici quadrate trasposte hanno lo stesso determinante;
2. Se gli elementi di una riga o di una colonna di una matrice quadrata sono nulli, il determinante è nullo;
3. Se si moltiplicano tutti gli elementi di una stessa riga o colonna di una matrice quadrata per uno stesso numero, anche il determinante della matrice risulta moltiplicato per quel numero;
4. Se in una matrice quadrata due righe (o due colonne) sono uguali, il determinante della matrice è nullo;
5. Se in una matrice quadrata una riga o una colonna è una combinazione lineare di altre righe (o colonne) il determinante è nullo.

Altre proprietà dei determinanti sono:

1. Date due matrici quadrate $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, il determinante del prodotto $\mathbf{AB}$ è uguale al prodotto dei determinanti, cioè
$$|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| = |\mathbf{AB}|$$
2. Data la matrice $\mathbf{A}$, la matrice $\mathbf{B} = \|\mathbf{A}/\mathbf{D}\|$ è la matrice inversa della matrice $\mathbf{A}$ e risulta:
$$|\mathbf{B}| = \mathbf{I}/\,|\mathbf{A}|$$
cioè l'inversa di una matrice $\mathbf{A}$ ha come determinante un numero che è l'inverso del determinante della matrice $\mathbf{A}$. Ne segue la proprietà che una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è *non nullo*.
3. Il determinante di una matrice diagonale è uguale al prodotto degli elementi che si trovano lungo la diagonale principale;
4. Il determinante di una matrice identica è uguale a 1;
5. Se gli elementi che si trovano da una stessa parte rispetto alla diagonale principale sono tutti nulli, il determinante è uguale al prodotto degli elementi che si trovano lungo la diagonale principale.

5.5 Matrice singolare

Se il determinante di una matrice quadrata è 0, la matrice si definisce "singolare"; se il determinante è diverso da 0, si chiama "non singolare" oppure anche "positivamente definita".

Calcoliamo il determinante della matrice che segue (usando il metodo dei cofattori sulla prima riga):

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$$
$$1(36-36) - 2(18-18) + 3(12-12) = 0$$

Questa matrice è singolare. Possiamo notare che ogni elemento della seconda riga della matrice è il doppio del corrispondente elemento della prima riga. E la terza riga è tripla rispetto alla prima. Quindi la seconda e terza riga sono riconducibili alla prima tramite una trasformazione di tipo lineare $j_{2i} = j_{1i} \times 2$ e $j_{3i} = j_{1i} \times 3$. Quando il determinante di una matrice è nullo, vi è almeno una riga o una colonna che può essere ottenuta come trasformazione lineare di un'altra.

6 Rango di una matrice

Se il determinante di una matrice è nullo, potrebbe esistere un suo minore con determinante "non nullo" (cioè diverso da zero). Si chiama *rango di una matrice* l'ordine massimo dei suoi minori "non nulli". Il concetto di rango di una matrice corrisponde al concetto di dimensionalità dello spazio occupato dalle colonne-vettore di una matrice.

Torniamo alla matrice $\mathbf{J}$ e proviamo a vedere se esiste un minore di ordine 2 che sia "non nullo". I minori calcolati sulla base della prima riga sono tutti nulli:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

Se passiamo alla seconda riga e alla terza, continuiamo a trovare minori nulli.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

e

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Siamo quindi costretti a scendere ai minori di ordine 1 e a questo punto sono tutti diversi da zero. Per cui il massimo *minore non nullo* della matrice $\mathbf{J}$ è di ordine 1 e il rango della matrice $\mathbf{J}$ è uguale a 1.

I determinanti possono quindi essere usati per individuare il rango di una matrice. Se infatti si ottengono delle sotto-matrici quadrate dagli elementi delle righe e delle colonne di una matrice è possibile ottenere i determinanti di tali submatrici. Tali determinanti sono detti minori della matrice; il rango della matrice corrisponde all'ordine massimo del minore non nullo della matrice.

Proprietà*. Il rango di una matrice possiede le seguenti proprietà:

1. Matrici trasposte hanno lo stesso rango;

2. Se in una matrice scambiamo tra di loro due righe (o due colonne) parallele, la matrice che si ottiene ha lo stesso rango della matrice di partenza;

3. Se una matrice $\mathbf{A}$ ha rango k, considerato un minore $\mathbf{M}$ di ordine k non nullo, ogni riga (o colonna) della matrice che non si trovi tra quelli che costituiscono $\mathbf{M}$ è una combinazione lineare delle k righe (o colonne) che costituiscono $\mathbf{M}$;

4. Se in una matrice $\mathbf{N}$ vi è un minore $\mathbf{M}$, di ordine k non nullo, e tutte le altre righe (o colonne) della matrice sono combinazioni lineari delle righe (o colonne) che costituiscono $\mathbf{M}$, allora la matrice è di rango k;

5. Dalle due precedenti proprietà, segue che il rango di una matrice rappresenta il massimo numero di righe (o colonne) *linearmente indipendenti* che si possono estrarre dalla matrice.

Altre proprietà dei ranghi possono essere trovate in (Harman, 1967).

7 Matrice inversa

Nell'algebra dei numeri, esiste un particolare elemento che, se moltiplicato per un dato numero ha come risultato il valore 1 ($ab = 1$). Questo elemento b viene chiamato "rapporto a 1" perché corrisponde a

$$b = \frac{1}{a}$$

Formalmente si scrive:

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

Anche in algebra matriciale, è a volte possibile trovare una matrice **B** che se moltiplicata per un'altra matrice, genera la matrice identica ($\mathbf{AB} = \mathbf{I}$). Questa matrice è chiamata "matrice inversa" e viene indicata con $\mathbf{A}^{-1}$. La matrice **A** dev'essere una matrice quadrata e non è assolutamente sicuro che esista una matrice inversa. Se esiste, allora

$$\mathbf{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Per poter trovare l'inversa, una prima necessità è che la matrice sia non singolare, cioè che $|A| \neq 0$ (il determinante di **A** sia diverso da zero). In altre parole si può invertire una matrice se il suo ordine corrisponde al suo rango. Ci si riferisce a queste condizioni come a matrici di *rango pieno* o *positivamente definite.*

Esistono svariati metodi per stabilire l'esistenza e calcolare l'inversa di una data matrice, in quanto i procedimenti diventano sempre più complicati all'aumentare dell'ordine della matrice.

Uno dei metodi per l'inversione di una matrice fa uso dei cofattori e dei determinanti. Secondo tale metodo, l'inversa di **A** si ottiene come

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{adj\mathbf{A}}{|A|}$$

dove adj**A** è la matrice "aggiunta" (o "aggiustata") e $|A|$ è il determinante. *La matrice aggiunta si ottiene sostituendo ad ogni elemento della matrice il suo cofattore e facendo infine la trasposta.*

Riepilogando, le operazioni da fare sono:

1. Calcolare il determinante (*se è uguale a zero*, la matrice non si può invertire);
2. sostituire ogni elemento della matrice con il suo cofattore;
3. fare la trasporta;
4. dividere ogni elemento per il determinante.

7.1 Esempi di inversioni

Facciamo tre esempi (sempre più complessi) con una matrice **D** (di ordine 2×2) e le matrici **B** e **C** del paragrafo 5 (i cui determinanti erano 13 e 82).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Per la matrice **D**, iniziamo calcolando il determinante

$$|D| = (5 \times 4 - 3 \times 2) = 14$$

poi sostituiamo ogni elemento con il suo cofattore:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

quindi facciamo la trasposta

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

e dividiamo ogni elemento per il determinante

$$\begin{bmatrix} 5/14 & -2/14 \\ -3/14 & 4/14 \end{bmatrix}$$

Per la verifica,

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/14 & -2/14 \\ -3/14 & 4/14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20-6}{14} & \frac{8-8}{14} \\ \frac{15-15}{14} & \frac{-6+20}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per l'inversa di **B** cominciamo a calcolare $adj\,\mathbf{A}$, sostituendo ad ogni elemento il cofattore e successivamente calcolando il determinante di ogni cofattore che abbiamo sostituito.

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -5 & 6 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Infine la trasposta viene divisa per il determinante (che era 13).

$$\begin{bmatrix} 4/13 & -5/13 & 2/13 \\ 3/13 & 6/13 & -5/13 \\ -5/13 & 3/13 & 4/13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.31 & -0.38 & 0.15 \\ 0.23 & 0.46 & -0.38 \\ -0.38 & 0.23 & 0.31 \end{bmatrix}$$

e questa è la matrice inversa di **B**. Per verificare, moltiplichiamo per la matrice originale, per ottenere la matrice identica (utilizzo la matrice in forma frazionaria perché ci semplificherà i calcoli).

$$\mathbf{BB^{-1}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/13 & -5/13 & 2/13 \\ 3/13 & 6/13 & -5/13 \\ -5/13 & 3/13 & 4/13 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3(4)+2(3)+1(-5)=13}{13} & \frac{-15+12+3=0}{13} & \frac{6-10+4=0}{13} \\ \frac{4+6-10=0}{13} & \frac{-5+12+6=13}{13} & \frac{2-10+8=0}{13} \\ \frac{12+13-15=0}{13} & \frac{-15+6+9=0}{13} & \frac{6-5+12=13}{13} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[MANCA l'inversione di C]

L'inversione di matrici di ordine 4 (o superiore) è decisamente più complessa perché implica il doppio uso del metodo dei cofattori e conviene affidarsi ad un computer (anche Excel e OpenCalc permettono di fare l'inversa di una matrice).

7.2 Particolari tipi di inverse

7.2.1 Inversa di una diagonale

L'inversa di una matrice diagonale è composta da una matrice diagonale i cui elementi sono il reciproco (1/n) dell'elemento corrispondente.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Dal momento che una matrice diagonale ha solo gli elementi della diagonale, per semplificare, lavoriamo con questa matrice semplificata:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{-1}$$

il cui determinante corrisponde alla traccia della matrice ed è abc. Procediamo all'inversione, calcolando i cofattori.

$$\frac{1}{abc} \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{bc}{abc} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ac}{abc} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ab}{abc} \end{bmatrix}$$

e semplificando

$$\begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}$$

7.2.2 Inversa di una simmetrica

Nell'invertire una matrice simmetrica, non è necessario fare l'operazione di trasposizione, proprio perché è simmetrica e la trasposizione non cambia nulla. Inoltre è sufficiente calcolare i cofattori di una metà della matrice. Consideriamo la matrice che segue (il cui determinante è 1016).

$$\begin{bmatrix} 5 & 25 & 22 \\ 25 & 151 & 130 \\ 22 & 130 & 120 \end{bmatrix}$$

I cofattori della prima riga e della prima colonna sono:

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 151 & 130 \\ 130 & 120 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 25 & 130 \\ 22 & 120 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 25 & 151 \\ 22 & 130 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 25 & 22 \\ 130 & 120 \end{vmatrix} & \ldots & \ldots \\ +\begin{vmatrix} 25 & 22 \\ 151 & 130 \end{vmatrix} & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

confrontate i cofattori degli elementi 1,2 e 2,1 e quelli degli elementi 1,3 e 3,1. Anche se apparentemente diversi, generano lo stesso determinante, quindi sono uguali. Alla fine del processo di sostituzione di ogni elemento con il suo cofattore, otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1220 & -140 & -72 \\ -140 & 116 & -100 \\ -72 & -100 & 130 \end{bmatrix}$$

che non è necessario trasporre perché a sua volta simmetrica.

7.2.3 Inversa di una matrice di ordine due

Nel caso di una matrice di ordine due, il procedimento di inversione si riduce ulteriormente, in quando è sufficiente: a) calcolare il determinante, b) scambiare di posto gli elementi della diagonale principale, c) cambiare di segno agli elementi della diagonale secondaria, d) dividere ogni elemento per il determinante. Infatti, se la matrice di ordine 2 fosse:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$$

la sostituzione con i cofattori e la trasposizione produrrebbe:

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

7.2.4 Proprietà*

Se è possibile individuare l'inversa di una matrice, allora saranno vere le seguenti proprietà:

a) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

b) $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$

c) $(\mathbf{A}^{-1})'\mathbf{A}' = \mathbf{A}'(\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}$

E' anche vero che l'inversa di una matrice ortogonale coincide con la sua trasposta, cioè $\mathbf{A}' = \mathbf{A}^{-1}$, dal momento che il prodotto di una matrice per la sua inversa produce la matrice identica.

8 Radici caratteristiche (*autovalore*, *eigenvalue*)*

Si chiamano radici caratteristiche o autovalori (in inglese *eigenvalues*) di una matrice quadrata simmetrica di ordine n ognuna delle soluzioni λ dell'equazione:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \mathbf{0}$$

od anche, scrivendo per esteso gli elementi di A:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda_n \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

In altre parole le radici caratteristiche sono le soluzioni dell'equazione che si ottiene sviluppando il determinante di $\mathbf{A}$. Si tratta di un'equazione algebrica di grado n che ammette n soluzioni reali o complesse (teorema fondamentale dell'algebra, Zwirner, 1963).

Ne segue che gli autovettori di $\mathbf{A}$ sono in numero di n.

Si chiama *vettore caratteristico* (*autovettore*, *eigenvector*) $\mathbf{a}$ associato ad un autovalore λ ogni vettore colonna $n \times 1$ tale che $\mathbf{Ra} = \lambda\mathbf{a}$ e $\mathbf{aa}' = \mathbf{I}$ oppure tale che $\mathbf{a}'\mathbf{Ra} = \lambda$.

Si dice che un autovettore associato ad un autovalore genera il corrispondente autovalore.

9 Algebra matriciale e statistica

Quando abbiamo affrontato la moltiplicazione fra vettori, abbiamo già visto come vi siano alcune relazioni fra l'algebra matriciale e alcune operazioni statistiche. Le ripropongo.

1. Il prodotto scalare del vettore unità con un qualunque vettore $\mathbf{x}$ equivale a calcolare la sommatoria dei valori, cioè $\sum x_i$:

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = \sum x_i$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = 1(x_1) + 1(x_2) + \cdots + 1(x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum x_i$$

Per cui, la media di una qualunque variabile X può essere espressa in forma matriciale come:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{1}{N}\mathbf{1}'\mathbf{x}$$

E gli scarti dalla media possono essere pensati come il vettore

$$\mathbf{d} = \mathbf{x} - \bar{x} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} - \bar{x}$$

2. Il prodotto scalare di un vettore per se stesso, equivale alla sommatoria dei quadrati, $\sum x_i^2$:

$$\mathbf{x}'\mathbf{x} = \sum x_i^2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1(x_1) + x_2(x_2) + \cdots + x_n(x_n) =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sum x_i^2$$

Per cui la varianza può essere espressa come:

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{N}(\mathbf{x} - \bar{x})'(\mathbf{x} - \bar{x}) = \frac{1}{N}(\mathbf{x}'\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}'\bar{\mathbf{x}})$$

3. Il prodotto scalare di due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ equivale alla sommatoria dei prodotti, $\sum xy$:

$$\mathbf{x}'\mathbf{y} = \sum x_i y_i$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1(y_1) + x_2(y_2) + \cdots + x_n(y_n) = \sum x_i y_i$$

La covarianza può allora essere espressa come:

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{N}(\mathbf{x} - \bar{x})'(\mathbf{y} - \bar{y}) = \frac{1}{N}(\mathbf{x}'\mathbf{y} - \bar{x}\bar{y})$$

10 Soluzioni degli esercizi

10.1 Vettori (par. 3.3)

a) $\begin{bmatrix} 2+1 & 2+5 & 2+3 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1,5 \times 0,3 \\ 1,5 \times 2,1 \\ 1,5 \times 1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,45 \\ 3,15 \\ 2,25 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4-5 \\ 1-5 \\ 6-5 \\ 2-5 \end{bmatrix} - 5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3.2+1.8 \\ 4.3+0.7 \\ 2.7+2.3 \\ 3.8+1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4-7 \\ 5-6 \\ 6-5 \\ 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1(4) + 2(3) + 3(2) + 4(1) \end{bmatrix} = 20$

10.2 Matrici (par. 4.7)

a)

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

b) $0,9$

c) **A**=**B**, $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$

d)

$$\begin{bmatrix} 4+3 & 4+2 & 4+4 \\ 4+5 & 4+1 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 9 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

e)

$$\begin{bmatrix} 3-2 & 2-2 & 4-2 \\ 5-2 & 1-2 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

f)

$$\begin{bmatrix} 3*1,5 & 2*1,5 & 4*1,5 \\ 5*1,5 & 1*1,5 & 2*1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5 & 3 & 6 \\ 7,5 & 1,5 & 3 \end{bmatrix}$$

g)

$$\begin{bmatrix} 3+2 & 2+1 & 4+5 \\ 5+4 & 1+3 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 9 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

h)

$$\begin{bmatrix} 3-2 & 2-1 & 4-5 \\ 5-4 & 1-3 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & \end{bmatrix}$$

i) Non conformabile

j)

$$\begin{bmatrix} 3(2)+2(4)+4(3) & 3(1)+2(5)+4(2) \\ 5(2)+1(4)+2(3) & 5(1)+1(5)+2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 21 \\ 20 & 14 \end{bmatrix}$$

k)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

11 Fonti

Queste sono le pagine o i capitoli dove potrete trovare le fonti che ho usato per questi *Appunti*: Lis et al. (1986, pp. 239-251), Tabachnick e Fidell (1989, pp. 685-694), Sen e Srivastava (1990, pp. 267-283), Myers e Well (1991, pp. 594-604), Stevens (1992, pp. 41-63), Luccio (1996, pp. 165-191), Allen (1997, pp. 6-10, 71-75), Tacq (1997, pp. 388-400), Kleinbaum, Kupper, Muller, e Nizam (1998, pp. 732-740), Caudek e Luccio (2001, pp. 14-31), Corbetta (2002, pp. 255-263).

Riferimenti bibliografici

Allen, M. P. (1997). *Understanding regression analysis.* New York-London: Plenum Press.

Caudek, C., & Luccio, R. (2001). *Statistica per psicologi.* Roma-Bari: Editori Laterza.

Corbetta, P. (2002). *Metodi di analisi multivariata per le scienze sociali. I modelli di equazioni strutturali.* Bologna: Il Mulino.

Harman, H. H. (1967). *Modern factor analysis.* Chicago: University of Chicago Press.

Kleinbaum, D. G., Kupper, L. L., Muller, K. E., & Nizam, A. (1998). *Applied regression analysis and other multivariable methods* (3rd ed.). Pacific Grove, CA: Duxbury Press.

Lis, A., Rossi, G., & Venuti, P. (1986). *L'analisi fattoriale in psicologia con applicazioni di psicologia clinica.* Padova: Cleup.

Luccio, R. (1996). *Tecniche di ricerca e analisi dei dati in psicologia.* Bologna: Il Mulino.

Myers, J. L., & Well, A. D. (1991). *Research design and statistical analysis.* New York: HarperCollins.

Namboodiri, K. (1984). *Matrix algebra: An introduction.* Newbury Park-London: Sage Publications.

Rossi, G. (2000). *Elementi di ragionamento statistico: per psicologia e scienze dell'educazione.* ([Online http://psico.univr.it/germano/abcstat/abcstat11.pdf])

Rossi, G. (2002). *Statistica descrittiva per psicologi.* Roma: Carocci.

Sen, A., & Srivastava, M. (1990). *Regression analysis: Theory, methods, and applications.* New York-Berlin: Springer-Verlag.

Stevens, J. (1992). *Applied multivariate statistics for the social sciences* (2nd ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Tabachnick, B. G., & Fidell, L. S. (1989). *Using multivariate statistics* (2nd ed.). New York: HarperCollins Publishers.

Tacq, J. (1997). *Multivariate analysis technique in social science research. Fromn problem to analysis.* London: Sage Publications.

Zwirner, G. (1963). *Lezioni di matematica, parte I.* Padova: CEDAM.