

# Elementi di Psicometria

1-Introduzione

vers. 1.4 (10 novembre 2011)

versione per stampa

Germano Rossi<sup>1</sup>

`germano.rossi@unimib.it`

<sup>1</sup>Dipartimento di Psicologia, Università di Milano-Bicocca

2011-2012

# Perché studiare statistica?

## 1 Per comprendere la letteratura specializzata

- Ci sono psicologi (i “teorici”) che studiano le “regole” con cui “funziona” la psiche dell’essere umano
- Altri psicologi (i “tecnici”) “usano” queste regole negli ambiti più svariati
- I *teorici* usano la statistica per avere una buona certezza della bontà delle regole
- La diffusione delle “regole” da parte dei *teorici* avviene tramite comunicazioni a congressi, report, articoli su riviste specializzate e libri
- I *tecnici* devono essere in grado di capire le regole, come e perché funzionano, quanto ci si può fidare
- I *tecnici* devono conoscere la statistica

# Perché studiare statistica?

## 1 Per comprendere la logica sottostante la ricerca in psicologia

- Le pubblicazioni presentano i propri risultati seguendo degli schemi (teoria, ipotesi, ricerca, risultati, conclusioni).
- Sapere come “funziona” la ricerca ci permette di capire la “letteratura psicologica”

## 2 Per condurre ricerche in psicologia

- È possibile che anche voi “possiate fare ricerca” un domani

# Cos'è la statistica

- Il termine **statistica** deriva da *statista* (uomo di stato) e originariamente indicava le misurazioni dello Stato.
- Oggi indica
  - sia la **scienza della statistica**
  - sia i valori che risultano dall'applicazione di alcuni algoritmi di calcolo (che producono gli **indici statistici**)
  - sia i **metodi** e le **tecniche** per calcolarli (ovvero l'analisi dei dati)

# Cos'è la statistica

La **statistica** come scienza si può suddividere in

- Statistica descrittiva (il primo passo) vs. statistica inferenziale (il passo successivo)

**Statistica descrittiva** Riassume e descrive tramite numeri le caratteristiche principali di un insieme di “misurazioni” (che rappresentano “informazioni”) raccolte sulla realtà

**Statistica inferenziale** Permette di stimare la “sicurezza” di alcune statistiche calcolate su un piccolo insieme (campione) rispetto alla popolazione oppure di confrontare tra loro dei gruppi (insiemi) differenti

# Cos'è la statistica

La **statistica** come scienza distingue fra

- Popolazione vs. campione

**popolazione** è l'insieme di tutti i “soggetti/oggetti” che si vorrebbe studiare

**campione** è l'insieme dei “soggetti/oggetti” che si studiano veramente

**indice statistico** è la sintesi “matematica” di un certo pensiero logico che viene applicato alle informazioni (variabili) raccolte su un campione (in particolare gli indici descrittivi)

**parametro** è il corrispettivo dell'indice statistico, ma calcolato/stimato sulla popolazione

# Cos'è la statistica

**Statistica esplorativa** Avendo un insieme di dati, cerca di capire quali relazioni esistano tra loro, permettendoci di pensare (ipotizzare) una teoria

**Statistica confermativa** Cerca di verificare se un ipotetico modello di relazioni fra i dati (una teoria) sia effettivamente accettabile

**Statistica univariata** Tecniche statistiche che si applicano ad una variabile per volta (tendenza centrale, variabilità...)

**Statistica bivariata** Tecniche che considerano due variabili congiuntamente (chi-quadro, t-test...)

**Statistica multivariata** Tecniche che tengono in considerazione contemporaneamente molte variabili (le vedrete il prossimo anno)

# Cos'è la statistica

Le misurazioni della statistica utilizzano delle “scale di misura” (che affronteremo fra poco) applicate a delle variabili

- scale a rapporto
- scale a intervallo
- scale ordinali
- scale nominali

**variabile indipendente** (o sperimentale) è una variabile che lo sperimentatore tiene sotto controllo

**variabile quasi-sperimentale** è una variabile simile a quella indipendente che però lo sperimentatore non può controllare

**variabile dipendente** è la variabile che si lascia libera di variare e di cui si studiano i cambiamenti in base ai singoli valori della indipendente



# Cos'è la statistica

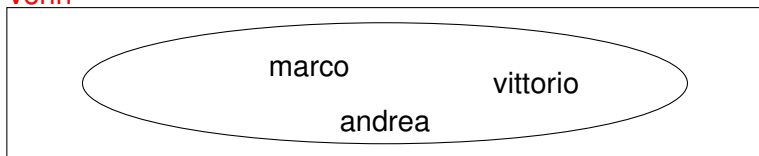
- In una ricerca si è misurata la capacità empatica (dipendente) rispetto al livello culturale (indipendente quasi-sperimentale) come reazione ad una situazione (creata appositamente) gioiosa o di dolore (indipendente sperimentale).
- lo sperimentatore ha poi calcolato il valore medio di empatia nei vari livelli culturale, nelle due situazioni sperimentali (esplorativa, descrittiva, univariata) e considerando entrambe le indipendenti (bivariata)
- osservando le medie, il ricercatore si è poi chiesto se la capacità empatica (esplorativa, inferenziale) dipende dal livello culturale (univariata), dal tipo di situazione emotiva (univariata) o da una loro interazione (bivariata).
- in base ai risultati ottenuti, lo sperimentatore ha ripetuto l'esperimento, selezionando due livelli culturali particolari e creando due situazioni molto emotigene (confermativa)

# Costrutto, variabile, costante

- Un **costrutto** è un concetto mentale che viene associato a qualche elemento della realtà per un qualche motivo; in un certo senso è la stessa cosa di un significato, ma un costrutto è un “significato complesso” (ad es. l'amicizia, l'aggressività)
- Una **variabile** è una visione particolare, una parte, un'aspetto di un costrutto (la variabile *persone frequentate* è un'aspetto del costrutto *amicizia*); la *variabile* ha questo nome perché rappresenta qualcosa che può assumere valori diversi
- Una **costante** è qualcosa che non cambia mai all'interno di un costrutto
- La possibilità di misurare un costrutto (tramite le variabili associate a certi aspetti del costrutto) è oggetto della *teoria della misurazione*

# Cos'è un insieme

- Un **insieme** è un “gruppo” di “oggetti”
- Si usano lettere maiuscole per indicare l'insieme
- Lettere minuscole per i suoi elementi
- Può essere definito da una **regola**,  $A = \{\text{gli studenti maschi di Psicologia di Milano-Bicocca}\}$
- oppure da un **elenco di oggetti**,  $B = \{\text{marco, andrea, vittorio}\}$
- Gli insiemi si rappresentano graficamente tramite i **diagrammi di Venn**

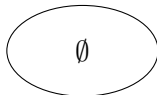


# Insiemi e suoi elementi

- L'insieme di tutti gli elementi possibili è l'Universo ( $U$ )



- Se un insieme non contiene elementi è vuoto ( $\emptyset$ )



- Un insieme può essere composto da altri insiemi  
Ad es.  $\mathbf{B}=\{\mathbf{D}, \mathbf{S}, \mathbf{P}\}$  dove  
 $\mathbf{D}=\{\text{Docenti Bicocca}\},$   
 $\mathbf{S}=\{\text{studenti Bicocca}\}$  e  
 $\mathbf{P}=\{\text{Personale Bicocca}\}$

# Teoria della misurazione

- «Misurare è assegnare un modello formale ad oggetti ed eventi secondo una regola, una qualunque regola, purché sia consistente» (Stevens)
- Esistono molti insiemi, alcuni di questi sono **non numerici** ovvero **empirici**, altri sono numerici
- L'appartenenza di un elemento ad un insieme può essere definito in modo implicito (**elenco**) o esplicito (**regola**)
- All'interno di un insieme può essere definita una “relazione” fra gli elementi (ad es.  $a < b$ ;  $a$  è padre di  $b$ )
- Fra 2 insiemi può essere definita una “funzione” che associa ad ogni elemento del primo insieme un elemento del secondo

# Teoria della misurazione

- Se per ogni coppia di elementi di un insieme (che sono fra loro in relazione) si riscontra un'analoga relazione fra gli elementi del secondo insieme (per il quale esiste una funzione di associazione), allora i 2 insiemi sono **omeomorfi** (hanno la stessa forma)

## Facciamo un esempio

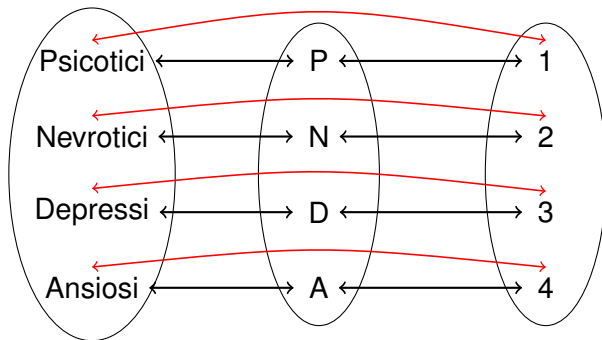
- Analizzando le cartelle cliniche di 100 pazienti “psichici”, li possiamo suddividere in 4 categorie: psicotici, nevrotici, depressi, ansiosi
- Abbiamo 2 insiemi: **A**, l'insieme degli individui (100 elementi) e **B**, l'insieme che li classifica (4 elementi)

# Teoria della misurazione

- Se facciamo un prodotto cartesiano (**AxB**), associando ogni paziente con la sua classificazione, otteniamo l'**Insieme classificatorio dei pazienti** di 100 elementi
- La relazione definita all'interno dei 2 insiemi è quella di uguaglianza (e di diversità). Ogni individuo può essere classificato in una e una sola delle categorie.
- Consideriamo solo la variabile “classificazione” (una delle due dimensioni del piano cartesiano, l'insieme **B**)
- Le categorie sono mutualmente escludentisi
- Rispetto alla classificazione due qualunque individui del primo insieme sono uguali o diversi (entrambi classificati nella stessa categoria o in categorie diverse)
- Poniamo l'insieme **C** composto da 4 lettere dell'alfabeto {P, N, D, A}

# Teoria della misurazione

- Stabiliamo una funzione associativa fra **B** e **C** tale che ad ogni tipo di paziente è associata una lettera
- Se per qualsiasi coppia di pazienti (**AxB**) vale la stessa relazione (di = o di  $\neq$ ) che vale per gli insiemi **B** e **C**, allora **B** e **C** sono omeomorfi (hanno la stessa forma)





# Teoria della misurazione

- La stessa cosa funziona se uso l'insieme numerico  $\{1, 2, 3, 4\}$  al posto di  $\{P, N, D, A\}$  che sarà omeomorfo sia a **C** che a **B**
- «Misurare un sistema empirico equivale ad individuare un sistema numerico ad esso omeomorfo» (Cristante, Lis, Sambin)
- Ma perché il sistema numerico sia omeomorfo, **deve mantenere le relazioni esistenti nell'insieme di partenza**
- Sul sistema numerico omeomorfo *si possono fare solo le operazioni algebriche che si potrebbero fare sul sistema empirico di partenza*

# Livelli di misura

Ipotizziamo di essere al supermercato, in coda alla cassa. Davanti a noi abbiamo 3 persone e notiamo che tutte e tre hanno acquistato anche uno dei prodotti in offerta (un succo di frutta):

- a) una signora piuttosto grassa con un carrello zeppo di prodotti e 12 confezioni in offerta
- b) un signore normale con 2 confezioni
- c) un'altra signora mingherlina con 4 confezioni

Quando arrivano alla cassa, prendiamo nota di quanto spendono. Abbiamo raccolto delle informazioni (**misurazioni**) su 3 persone (**unità statistiche** o **casi** statistici)

Sull'insieme degli individui possiamo incrociare diversi sistemi classificatori.

# Livelli di misura

Riassumiamo in una tabella (simile ad un piano cartesiano, in insiemistica) le informazioni (i sistemi classificatori) che abbiamo:

	Genere	corporatura	confezioni	conto
a	F	grassa	12	180
b	M	normale	2	50
c	F	mingherlina	4	40

- Il **genere** si limita a distinguere categorie fra loro diverse
- La **corporatura** oltre a distinguere le categorie, permette anche di metterle in ordine (da magro a grasso), ma non è possibile *quantificare* la differenza fra “mingherlina” e “normale” o fra “normale” e “grassa”
- Le variabili **confezioni** e **conto** usano anche un'*unità di misura* e permettono di **quantificare** le differenze fra i diversi valori (fra 2 e 4 confezioni c'è una differenza di 2)

# Livelli di misura

- I diversi modi di misurare si chiamano **livelli di misura**
- I livelli di misura possono essere classificati anche con altre, diverse modalità

qualitative vs. quantitative

discrete vs. continue

nominali vs. ordinali vs. intervallo/rapporto

## Attenzione

- Excel e SPSS possono lavorare con numeri e con stringhe (testo)
- Excel e SPSS non sanno nulla delle scale di misura
- Se sono numeri, li trattano come numeri

# Qualitative vs. quantitative

- Un livello di misura è **qualitativo** quando tiene conto solo e soltanto di una qualche **qualità** di ciò che si sta misurando (ad. es. il colore dei capelli, la razza di appartenenza, il titolo di studio raggiunto)
- Le scale qualitative vengono anche chiamate **categoriali**
- Un livello di misura è **quantitativo** quando è possibile usare i numeri per indicare i diversi livelli di ciò che si sta misurando (ad. l'età, l'altezza di una persona, il numero di risposte giuste ad un questionario) e il numero esprime “effettivamente” un'**unità di misura**

# Discrete vs. continue

- Un livello di misura è **continuo** quando un valore utilizzato “scivola” nell’altro, cioè quando, fra una qualunque misurazione e l’altra, vi sono infinite possibili misurazioni (ad es. l’età). Il valore che viene misurato è sempre un’*approssimazione del valore reale* (l’approssimazione dipende dalla sensibilità dello strumento di misura)



- Un livello di misura è **discreto** quando un valore utilizzato è completamente separato da qualunque altro e non vi sono valori intermedi; le variabili qualitative sono sempre discrete, mentre quelle quantitative sono discrete se non è possibile effettuare una misurazione intermedia fra due valori contigui (ad es. numero di persone che entrano in un negozio)



# Nominali vs. ordinali vs. intervallo/rapporto

- È il sistema di classificazione più usato ed è stato proposto da Stevens
- Un livello di misura è **nominale** quando è soltanto possibile dare un nome (o etichetta) alle categorie di ciò che si sta misurando (ad. es. il colore dei capelli)
- Un livello di misura è **ordinale** quando è possibile ordinare i diversi livelli di categorie (ad. per il titolo di studio, la maturità è superiore alla licenza media, la laurea è superiore alla maturità, ...) in un modo qualunque
- Un livello di misura è ad **intervallo/rapporto** quando i valori assunti dalla variabile possono essere espressi tramite numeri che fanno riferimento ad una specifica **unità di misura** (anni di studio, altezza in cm, ...)

# Scala nominale

- Sistema empirico classificatorio
- 2 elementi possono appartenere a categorie uguali (=) o diverse ( $\neq$ ) (**relazione** di uguaglianza o **di equivalenza**)
- ogni elemento appartiene **ad una ed ad una sola** categoria
- le categorie possono usare qualsiasi tipo di etichetta (simboli, testo o numeri); anche se si usano i numeri, questi **non sono numeri**, ma testo (quindi 1 significa “uno”)

## Esempio

Il **genere** (maschio, femmina), la **professione** (chirurgo, operaio, ...),  
l'**il partito politico** (PDL, PD, IDV, ...)



# Scala ordinale

- Oltre alle caratteristiche precedenti (uguaglianza, disuguaglianza)
- 2 elementi diversi possono essere ordinati fra di loro, così che si può dire che uno dei due è minore dell'altro oppure è maggiore (**relazione d'ordine**)
- le categorie possono usare etichette che permettano di esprimere la relazione d'ordine (testo [a, b, c...] e numeri)

## Esempio

Lo **status socio-economico** (povero, borghese, ricco), il **livello scolastico** (elementari, medie, superiori, laurea, dottorato), le **classi di età** (neonato, bambino, pre-adolescente, adolescente, giovane, giovane-adulto, adulto, adulto-anziano, anziano)

# Scala a intervalli

- Oltre alle caratteristiche precedenti (uguaglianza, disuguaglianza, ordine)
- Fra 2 categorie esiste teoricamente un intervallo che è esprimibile come multiplo di un intervallo unitario
- All'intervallo unitario è possibile riferire qualunque intervallo fra 2 categorie
- Esiste un punto-origine relativo
- Le categorie possono usare solo etichette numeriche (valori numerici positivi e negativi)

## Esempio

La **temperatura** (0 gradi, 15 gradi, 25 gradi), la maggior parte dei **test psicologici** (QI, STAI, DPI, ...)

# Scala a rapporti

- Oltre alle caratteristiche precedenti (uguaglianza, disuguaglianza, ordine, intervallo unitario)
- Il punto origine è assoluto
- Le categorie possono usare solo etichette numeriche (solo valori numerici positivi)

## Esempio

L'**età**, l'**altezza**, il **peso**, la maggior parte delle variabili fisiche

# Riepilogo

Relazione	Scala di misura			
	<i>Qualitative</i>		<i>Quantitative</i>	
	<i>Nominale</i>	<i>Ordinale</i>	<i>Intervallo</i>	<i>Rapporto</i>
Equivalenza	$=, \neq$	$=, \neq$	$=, \neq$	$=, \neq$
Ordine		$<, >$	$<, >$	$<, >$
Intervallo			$+, -$	$+, -$
Rapporto				$\times, \div$

# Implicazioni

- Ogni unità statistica può avere uno e un solo valore per ogni caratteristica misurata

## Esempio

Se ho rilevato il reddito (scala a rapporti), non posso avere una persona che appartenga contemporaneamente ai poveri e ai ricchi

- Ogni livello di misurazione superiore include le caratteristiche di quelli inferiori
- La scala “nominale” ha il minimo di informazione
- La scala “a rapporto” ha il massimo di informazione
- È possibile abbassare il livello di una misurazione, perdendo informazioni (ad es. da una scala a intervallo ad una ordinale)

## Esempio

Posso trasformare l'età (misurata in anni dalla nascita) in una scala ordinale (fasce di età)

# Implicazioni

- Non è possibile alzare il livello di una misurazione, perché non posso aggiungere un'informazione che non ho raccolto in precedenza

## Esempio

Se ho rilevato la fascia d'età (scala ordinale), non posso passare all'età in anni (scala a rapporti)

- Se l'informazione aggiuntiva è compresa nella scala ordinale, allora posso alzare il livello

## Esempio

Se ho rilevato la scolarità tramite i livelli scolastici (elementare, media inf., media superiore...), posso passare al numero di anni trascorsi a scuola (scala a rapporti, elementare=5, m.inf=8, ...)

# Implicazioni

Per stabilire il livello di misurazione di una variabile devo considerare:

- la natura della variabile stessa
- il modo in cui è stata rilevata
- quali sono le relazioni valide all'interno della variabile

## Esempio

Il **reddito** è una variabile quantitativa che, in teoria, oscilla fra 0 e  $+\infty$ ; se rilevo il valore esatto del reddito, sarà misurata a livello *rapporto* (unità di misura, origine assoluta); se rilevo delle fasce di reddito, sarà misurata a livello *ordinale* (non esiste un'unità di misura)

# Esercizio

Descrizione variabile	N O I R
1 Genere (maschi, femmine)	
2 Anno di nascita	
3 Età	
2 Stato civile	
3 Professione	
4 Titolo di studio (licenza elementare, medie...)	
5 Anni di studio completati	
6 Mezzo di trasporto utilizzato x raggiungere il luogo di lavoro	
7 Ore passate su un mezzo di trasporto x raggiungere il luogo di lavoro	
8 Quante volte alla settimana mangi fuori casa (considerando i due pasti principali)	
9 Per lavarti, usi: 1) la doccia; 2) la vasca da bagno	



# Esercizio

Descrizione variabile	N O I R
10 Mediamente, quante docce fai in una settimana (non importa quanto durano)	
11 Rispetto ai tuoi orientamenti sessuali, ti consideri: 1) eterosessuale; 2) omosessuale; 3) bisessuale; 4) transsessuale; 5) altro	
12 Quanto sei soddisfatto della tua vita in generale? 0) per niente; 1) poco; 2) abbastanza; 3) molto; 4) moltissimo	
13 Ammontare delle spese per le vacanze	
14 Numero di tatuaggi	
15 Ampiezza di ogni tatuaggio	
16 Il tatuaggio è colorato? (sì, no)	
17 Hai piercing? 1) sì 2) no	
18 Se sì, quanti piercing hai?	
19 Quoziente di Intelligenza	

# Esercizio

Descrizione variabile	N O I R
20 Spesso i partiti politici vengono classificati di destra o di sinistra (e considerati come opposti) o di centro. Su una scala che va da sinistra a destra, come giudichi il tuo orientamento politico (1=sinistra – 10=destra)	
21 Su una scala da 1 a 10, quanto sei d'accordo che gli extra-comunitari vadano espulsi dal paese?	
22 "Un alunno picchia chi non sa difendersi." 0=no; 1=qualche volta; 2=sì	
23 A suo parere, il bullismo si manifesta principalmente tra compagni di classe: a) dello stesso sesso, b) di sesso diverso, c) entrambi	
24 Quali forme di bullismo ritiene maggiormente diffuse? a) verbale (umiliazioni, ingiurie, ricatti, minacce), b) fisica (percosse, furti, costrizioni), c) indiretta (ritorsioni, esclusione, mettere in giro storie).	

# Indici statistici

- Una statistica è una regola che permette di calcolare un nuovo numero, che sarà un indice caratteristico di un insieme numerico
- Avendo un insieme di dati, possiamo fare una distribuzione di frequenze, delle rappresentazioni grafiche, calcolare delle statistiche descrittive

I tipi di statistiche possibili sono:

- Statistiche della **tendenza centrale**: danno indicazioni sulla prevalenza dei dati
- Statistiche di **variabilità**: come i dati sono dispersi
- Statistiche di **posizione**: associano certi valori con la posizione che occupano nella distribuzione e viceversa
- Statistiche di **associazione**: ci informano su quanto due (o più) variabili sono collegate fra loro

# L'esperimento di Sara

Sara è una dottoranda (inventata) che svolge anche le funzioni di esercitatore. Usando i suoi studenti delle esercitazioni ha fatto un piccolo esperimento su di loro.

- Prima di iscriversi alle esercitazioni tutti gli studenti hanno compilato un test di matematica
- Durante la prima lezione, Sara ha sottoposto un breve questionario con cui ha raccolto diverse variabili: genere e laurea triennale in corso, numero di corsi di matematica frequentati in passato, voto medio in matematica alla fine del liceo, punteggio al test di matematica, auto-valutazione della propria paura della matematica

# L'esperimento di Sara

- Verso la metà del semestre, Sara attua il suo esperimento
  - Prima Sara insegna agli studenti a contare il battito cardiaco
  - Quindi chiede di misurare il proprio battito cardiaco
  - Sottopone gli studenti ad un test di ansia di stato (10 domande)
  - Sara annuncia che adesso farà un compito a sorpresa
  - Consegna il compito, chiede di tenerlo girato, e prima di dare il via al compito, chiede di misurare di nuovo il battito cardiaco e di compilare un'altra volta il test d'ansia
  - Parte il compito (11 domande, le prime 10 valgono 1 punto la 11ma vale 3 punti)
  - Gli studenti consegnano e Sara spiega che era un'esperimento (e non un vero compito), che l'11ma domanda era diversa: per alcuni era facilissima, per altri era impossibile da rispondere
  - Sara chiede loro di misurare di nuovo il battito cardiaco e rifare il test d'ansia

# Operazioni aritmetiche

Inevitabilmente, per studiare statistica serve un certa conoscenza di matematica. Facciamo un ripasso:

<i>Operazione</i>	<i>Relativa inversa</i>
Addizione	Sottrazione
Moltiplicazione	Divisione
Potenza	Radice

# Relazioni fra operazioni

- L'**addizione** equivale all'unione di due o più parti (quantità) per formare un totale ( $a + b = t$ )
- Gli **addendi** possono essere sommati in *qualunque ordine*
- La **sottrazione** è l'operazione inversa dell'addizione, ovvero la separazione di una parte da un totale ( $t - b = a$ )
- I **sottraendi** devono essere sottratti nell'*esatto ordine* indicato
- Se la quantità da sottrarre è maggiore del totale, il risultato è negativo (ad indicare una “mancanza”)

# Relazioni fra operazioni

- La **moltiplicazione** è la somma di uno stesso addendo per più volte ( $a + a + a = 3 \text{ volte } a = 3 \times a = 3a$ )
- I **moltiplicandi** possono essere moltiplicati in *qualsunque ordine*
- La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione
- I **dividendi** devono essere “operati” nell'*esatto ordine* indicato
- La **potenza** indica un valore moltiplicato per se stesso più volte ( $3 \times 3 = 3^2 = 9$ ,  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ )
- La **radice quadrata** è l'operazione inversa della potenza ( $\sqrt{9} = 3$ ,  $\sqrt[4]{16} = 2$ )
- Le parentesi permettono di cambiare le priorità e l'ordine delle operazioni:  $2 \times 4 + 7 = (2 \times 4) + 7 \neq 2 \times (4 + 7)$



# Operazioni aritmetiche

<i>Operazione</i>	<i>Simboli</i>	<i>Esempi</i>	<i>Esempi simbolici</i>
Addizione	+	$4 + 5$	$a + b$
Sottrazione	-	$4 - 5$	$a - b$
Moltiplicazione	$\times, \cdot, *$	$4 \times 5, 4 \cdot 5, 4 * 5, 4(5)$	$ab$
Divisione	$:\div, /, _$	$4 : 5, 4 \div 5, 4/5, \frac{4}{5}$	$a \div b, a/b, \frac{a}{b}$
Potenza	$x^n$ con $(n \geq 1)$	$4^5, 4^2$	$a^2, a^b$
Radice	$\sqrt[n]{x}, x^n$ con $n < 1$	$\sqrt[5]{4}, \sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 4^{.5}$	$\sqrt{a}, \sqrt[b]{a}$

## Precedenze

- Simboli in parentesi (ricorsivamente)
- Moltiplicazioni e divisioni (quindi anche potenze)
- Addizioni e sottrazioni

# Operazioni algebriche

- Un'espressione algebrica è una sequenza di simboli e/o numeri  
( $a + 2$ )
- Un'equazione indica un'eguaglianza ( $10 + 2 = 6 + 6$ ) ed è formata da due espressioni algebriche separate da un uguale
- L'equazione indica che i due "termini" o "membri" dell'espressione algebrica sono fra loro equivalenti
- Una qualunque operazione (+, -, \*, :) applicata ad un'equazione, dev'essere effettuata su entrambi i membri dell'equazione  
( $3 + 10 + 2 = 3 + 6 + 6$ ) affinché si mantenga l'uguaglianza
- Se l'operazione applicata all'equazione utilizza un numero o un simbolo già presente, possiamo ottenere una trasposizione, dando l'impressione che il numero sia passato da un lato all'altro dell'=  
e abbia cambiato segno  
( $10 + 2 - 2 = 6 + 6 - 2 \Rightarrow 10 = 6 + 6 - 2$ )

# Trasposizione

- Spostare un numero o un simbolo all'altro membro di un'equazione si chiama “trasposizione”
- Spostare un addendo o un sottraendo all'altro membro di un'equazione equivale a cambiargli il segno  
 $(a + b = c \Rightarrow a + b - b = c - b \Rightarrow a = c - b)$
- Spostare un moltiplicando o un dividendo all'altro membro di un'equazione equivale a usare la funzione inversa

$$(a \cdot b = c \Rightarrow a \cdot b \cdot \frac{1}{b} = c \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow a = \frac{c}{b})$$

# Frazioni

- La somma di più frazioni è possibile se hanno lo stesso denominatore e si sommano i numeratori

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{SI}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \text{NO}$$

- Se hanno denominatori diversi, bisogna trovare un denominatore comune

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$$

- La moltiplicazione di frazioni implica moltiplicare sia il numeratore che il denominatore

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3}$$

# Sommatoria

- La somma di un certo numero di valori (anche diversi fra loro) è indicata con il simbolo sommatoria ( $\sum$ )
- Perciò

$$\sum_{i=1}^N X_i$$

significa “sommare tutti i valori che la variabile X può assumere iniziando con il primo valore (i=1) fino al valore N-esimo (i=N)”

Contatore	Valori	$\sum$
1	3	3
2	4	3 + 4
3	5	3 + 4 + 5
		12

# Sommatoria

- Si possono usare anche versioni più sintetiche:  $\sum X_i$  o  $\sum X$  che significano la stessa cosa, in quanto si sottintendono gli indici
- Se si usano più indici ( $\sum X_{ij}$ ) si fa riferimento a due diversi contatori (ad es. per indicare gli elementi di riga e di colonna di una tabella)
- I totali rispetto ad un certo contatore si indicano con un punto ( $\sum X_{.j}$ ,  $\sum X_{i.}$  e  $\sum X_{..}$ )

# Sommatoria

La sommatoria può essere usata come un'altro tipo di operazione

Valori	$\sum X$	$(\sum X)^2$	$\sum X^2$
3	3	3	9
4	3 + 4	3 + 4	16
5	3 + 4 + 5	3 + 4 + 5	25
	12	$(12)^2$	50

È diverso sommare i quadrati  $\sum X^2$   
 o elevare a quadrato una somma  $(\sum X)^2$

# Sommatoria: Regole

Proprietà e regole della sommatoria (con X e Y variabili)

- 1 La sommatoria di una somma **equivale** alla somma delle sommatorie:  $\sum (X + Y) = \sum X + \sum Y$
- 2 La sommatoria di una differenza **equivale** alla differenza delle sommatorie:  $\sum (X - Y) = \sum X - \sum Y$
- 3 **Ma** la sommatoria di un prodotto **non equivale** al prodotto delle sommatorie:  $\sum XY \neq \sum X \sum Y$
- 4 **Quindi** anche la sommatoria di una potenza **non equivale** alla potenza di una sommatoria:  $\sum X^2 \neq (\sum X)^2$



# Sommatoria: Regole

Proprietà e regole della sommatoria (con  $k$ =costante,  $X$  e  $Y$  variabili)

5 La sommatoria di una costante **equivale** a  $N$  volte la costante:

$$\sum k = Nk$$

6 Sommare una costante a dei valori equivale a sommare  $N$  volte la costante alla somma dei valori:  $\sum (X + k) = \sum X + Nk$

7 Analogamente per la sottrazione:  $\sum (X - k) = \sum X - Nk$

8 Moltiplicare una costante a dei valori equivale a moltiplicare la costante alla somma dei valori:  $\sum kX = k \sum X$

Potete fare delle prove a mano o in Excel seguendo gli esempi e gli esercizi del primo capitolo del testo.