Elementi di Psicometria

10-Il test t per un campione e la stima intervallare

vers. 1.1 (6 dicembre 2011)

versione per stampa

Germano Rossi[1]

germano.rossi@unimib.it

[1] Dipartimento di Psicologia, Università di Milano-Bicocca

2011-2012

La verifica d'ipotesi

- Se conosco media e dev.st. della popolazione posso chiedermi se un campione appartiene a quella popolazione
- La verifica d'ipotesi sulla media di un campione si applica tramite un punto z fra la media del campione e quello della popolazione di riferimento

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

- Quindi si trova l'area corrispondente al punto z, che è la probabilità associata a quel valore (p)
- E si confronta con il livello di significatività (α arbitrario)
- Se $p \leq \alpha$ rifiuto l'ipotesi nulla (H_0) e accetto quella alternativa (H_1)
- Se $p > \alpha$ accetto l'ipotesi nulla (H_0) e rifiuto quella alternativa (H_1)

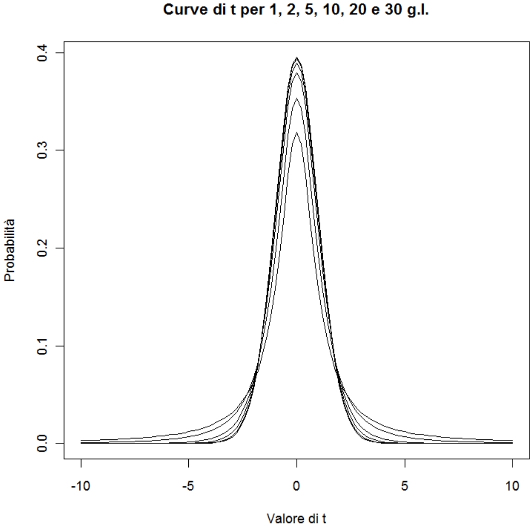
La verifica d'ipotesi con σ sconosciuta

- Quando non si conosce la deviazione standard della popolazione, la si può stimare tramite la deviazione standard del campione

$$\frac{\overline{X} - \mu}{s_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{N}}}$$

- Tuttavia i valori ottenuti da questa formula non si distribuiscono esattamente come una normale (se non per campioni con N superiore a 30), perché $s_{\overline{X}}$ è solo una stima di $\sigma_{\overline{X}}$
- La famiglia di distribuzioni basata su $s_{\overline{X}}$ si chiama **distribuzione t** (di Student)
- Si tratta di una famiglia perché la curva di *t* cambia in base alla numerosità (o meglio ai gradi di libertà)

Distribuzioni *t* (di Student)



- Per fortuna ci sono le tavole di $\mathtt{t}$ (Tavola B a p. 474)
- Si usa la *distribuzione* t (con df=N-1)
- Per $N > 30$ la $\mathtt{t}$ si approssima alla normale

Tavola di t (esempio)

Valori critici di *t*

	Livello di significatività per il test a una coda (monodirezionale)					
	0,10	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,0005**
	Livello di significatività per il test a due code (bidirezionale)					
df	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	1,638	2,343	3,182	4,541	5,841	12,941
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,449	5,405
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587

Gradi di libertà

- Il concetto di "gradi di libertà" (**gl** o **df**) è comune a tutta la statistica
- In linea di massima, i df dipendono dalla numerosità
- In questo caso, usiamo la deviazione standard
- per ogni $(X - \overline{X})$ solo $N - 1$ valori sono liberi di variare casualmente
- l'ultima X, infatti, deve avere un valore tale che la somma di tutti gli scarti sia 0

P e valore critico

- La tavola della normale ci forniva una probabilità che veniva confrontata con un livello di significatività (α)
- La tavola di *t* ci fornisce un valore critico per un determinato livello di significatività (sempre α)
- I due valori non sono antagonisti
- Il valore di p è la probabilità associata ad una certa statistica *t*
- Il valore critico (v_c) di *t*, è il valore della statistica associato ad un certo livello di significatività (α)

- **Con** p
- Se $p < \alpha$, rifiuto H_0
- Se $p > \alpha$, accetto H_0

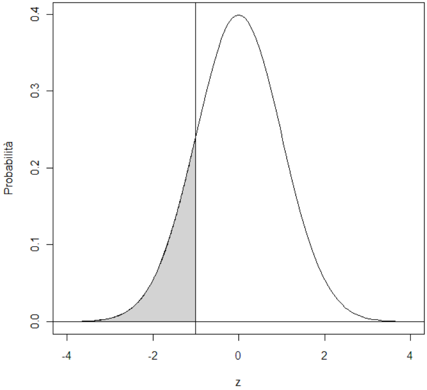
- **Con** v_c
- Se $|v_c| < |t|$, rifiuto H_0
- Se $|v_c| > |t|$, accetto H_0

Verifica d'ipotesi con σ sconosciuta

- Ho un campione (N=20) con $\overline{X}$=195 e $s = 15$ in una variabile. Conosco la media della popolazione ($\mu = 200$) ma non conosco σ
- Ipotizzo che il campione sia stato estratto casualmente da quella popolazione
- $H_0 : \mu_c = \mu = 200 \qquad H_1 : \mu_c < \mu$
- Uso
$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{N}}} = \frac{195 - 200}{15/\sqrt{20}} = -1.49$$
- si ignora il segno e si cerca sulle tavole
- ipotizzando $\alpha = .05$ (monodirezionale), per 19 gl, $v_c = 1.73$
- se fosse vera l'ipotesi nulla, un campione estratto da quella popolazione avrebbe il 5% di probabilità di avere una media che sta a 1.73 deviazioni standard sotto la media $(t = -1.73)$

Verifica d'ipotesi con σ sconosciuta

- se trasformo la distanza della media del campione (rispetto alla media della popolazione) in valore t, ottengo $(t = -1.49)$
- il valore critico (1.73) è maggiore della statistica $(t = -1.49)$, cioè è più distante dalla media
- quindi $(t = -1.49)$ avrà una probabilità maggiore del 5%
- accetto H_0



- Concludo che il campione con $\overline{X}$=195 e $s = 15$ è stato estratto dalla popolazione con $\mu = 200$

Stima intervallare

- Il test puntuale ci permette di accettare o rifiutare l'ipotesi nulla
- Ma l'ipotesi nulla è un singolo, specifico valore
- Nell'esempio precedente, sappiamo che il campione con $\overline{X}$=195 è stato estratto da una popolazione con $\mu = 200$, ma potrebbe essere stato estratto da popolazioni con $\mu = 195$ oppure $\mu = 196$ oppure $\mu = 197$... ma anche con $\mu = 194$...
- Se fossero possibili più ipotesi nulle, dovremmo calcolare più statistiche t
- L'alternativa è usare la stima intervallare
- Se la media della popolazione fosse davvero $\mu = 200$, quali sarebbero gli estremi inferiori e superiori delle medie dei campioni estratti casualmente?
- Gli estremi si ottengono stabilendo un certo intervallo di probabilità (*intervallo di confidenza* o *intervallo di fiducia*), posto normalmente al 95% o al 99% (complementi ad α)

Stima intervallare

- Usiamo la formula inversa del punto z, ma usando il valore critico di t per determinati gradi di libertà

$$(\overline{X} - v_c s_{\overline{X}}) \leq \mu \leq (\overline{X} + v_c s_{\overline{X}})$$

- Se vogliamo calcolare un intervallo di confidenza al 95% dovremo cercare il valore di t corrispondente ad $\alpha = .05$ in base ai gradi di libertà
- Se invece volessimo calcolare un intervallo di confidenza al 99% dovremmo cercare il valore di t corrispondente ad $\alpha = .01$, sempre in base ai gradi di libertà
- Se N=20, i valori critici di t sarebbero t=2.09 per il 95% e t=2.86 per il 99%

Stima intervallare

- Lavoriamo con la media della popolazione: Estraendo casualmente dei campioni, quale potrebbe essere l'oscillazione della media di campioni di ampiezza 20?
- Sostituiamo i valori (ipotizzando 95%)
- $$(\overline{X} - v_c s_{\overline{X}}) \leq \mu \leq (\overline{X} + v_c s_{\overline{X}})$$
- $$(200 - 2.09 \times \frac{15}{\sqrt{20}} \leq \mu \leq (200 + 2.09 \times 3.35)$$
- l'intervallo di fiducia al 95% è compreso fra 193 e 207

Test su un campione: N piccolo

- Ho un campione (N=20) con $\overline{X}$=195 e s=15 in una variabile. La media della popolazione è $\mu = 200$ ma non conosco σ

Stima puntuale

$$\frac{195 - 200}{15/\sqrt{20}} = -1.49$$

- si ignora il segno e si cerca sulle tavole
- ipotizzando $\alpha = .05$ (bidirezionale), per 19 gl, $t = 2.09$
- accetto H_0

Stima intervallare

- Considerando che $t = 2.09$ corrisponde ad $\alpha = .05$ (bidirezionale)
- $195 \pm 2.09 \times (15/\sqrt{20}) = 195 \pm 2.09 \times 3.35 = 195 \pm 7.01$
- 188; 202
- 200 è compreso nell'intervallo
- accetto H_0

Stima intervallare

- Considerando che $t = 2.09$ corrisponde ad $\alpha = .05$ (bidirezionale)
- $195 \pm 2.09 \times (15/\sqrt{20}) = 195 \pm 2.09 \times 3.35 = 195 \pm 7.01$
- 188; 202
- 200 è compreso nell'intervallo
- accetto H_0

Questo significa che, se il campione ha media 195 e dev. st. 15, potrebbe essere stato estratto casualmente da popolazioni la cui media oscilla fra 188 e 202.
Ovvero se rifacessimo il test puntuale con ipotesi nulle diverse ($H_0 : \mu = 190$, $H_0 : \mu = 195$, $H_0 : \mu = 202$) dovremmo comunque accettare l'ipotesi nulla.

SPSS: Gruppo singolo

- `Analizza | Confronta medie | Test T: campione unico`
- Scrivere un valore di media in `Valore oggetto del test`
- Infine `OK`

Risultati

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
fqc_b	100	72,270	3,2157	,3216
fqc_p	100	73,850	5,1314	,5131
hr_post	100	72,8000	4,73969	,47397

One-Sample Test

	Test Value = 70					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
fqc_b	7,059	99	,000	2,2700	1,632	2,908
fqc_p	7,503	99	,000	3,8500	2,832	4,868
hr_post	5,908	99	,000	2,80000	1,8595	3,7405

Come si riportano i risultati

- Ipotizzando di usare la frequenza cardiaca misurata sugli studenti di Sara e confrontandoli con un battito cardiaco medio di 70

Esempio

Confrontando il battito cardiaco degli studenti di Sara, in situazione normale (prima e subito dopo il presunto esame) con il valore medio di 70, vediamo come le medie siano tutte significativamente superiori ($p<.001$) e quindi possiamo ipotizzare che la frequenza cardiaca degli studenti di Sara, già nella situazione di base è globalmente maggiore di quella normale.

Esempio

Il battito cardiaco degli studenti di Sara è statisticamente superiore a quello considerato normale nelle tre situazioni, misurazione di base ($t=7.059$, $df=99$, $p<.001$), pre-esame ($t=7.503$; $df=99$; $p<.001$) e post-esame ($t=5.908$; $df=99$; $p<.001$)

Applicabilità

1. Quando si conosce la media della popolazione (μ) ma non la deviazione standard (σ)
2. Per confrontare la media di un campione con i risultati di una precedente ricerca pubblicata (media usata come stima della media della popolazione)
3. Per confrontare un singolo soggetto (il suo punteggio diventa la stima della popolazione) con il campione

- Cosa si usa
    - 1 variabile **quantitativa** *dipendente* su cui verrà calcolata la media
    - 1 valore utilizzato come media della popolazione