Elementi di Psicometria

9-Introduzione alla statistica inferenziale

vers. 1.1a (6 dicembre 2011)

versione per stampa

Germano Rossi[1]

germano.rossi@unimib.it

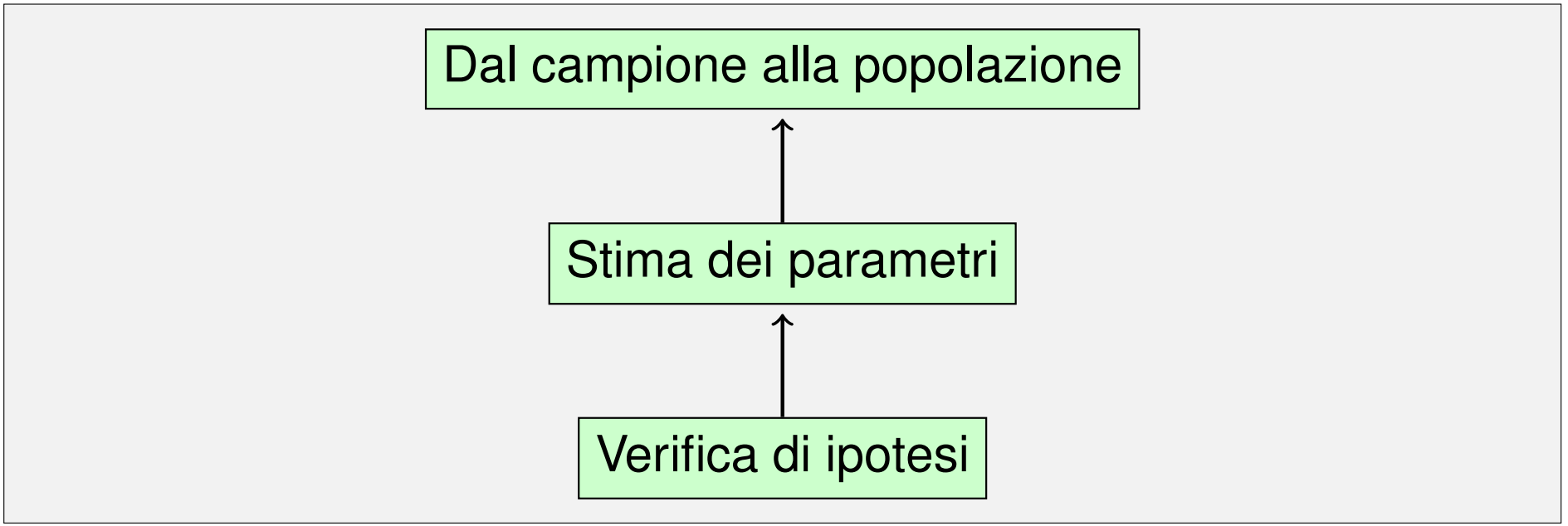
[1]Dipartimento di Psicologia, Università di Milano-Bicocca

2011-2012

Introduzione alla statistica inferenziale

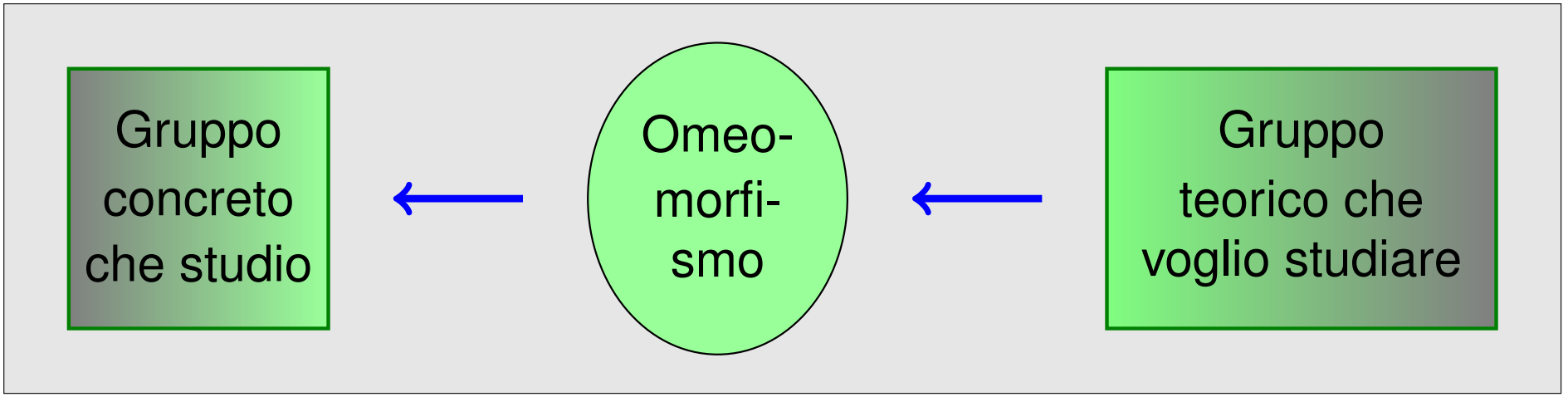
- Chi si occupa di comportamento necessita di studiare il comportamento delle persone (la popolazione) e di trarre delle conclusioni
- Noi di solito possiamo misurare però solo una piccola parte di queste popolazioni, tramite i campioni
- Il campionamento è l'estrazione di una parte della popolazione (secondo determinati criteri) per poterla studiare più agevolmente
- Usiamo la statistica inferenziale per fare inferenze su una popolazione a partire da un campione prelevato da quella popolazione
- Il campione dev'essere rappresentativo

Inferenza statistica: Schema concettuale



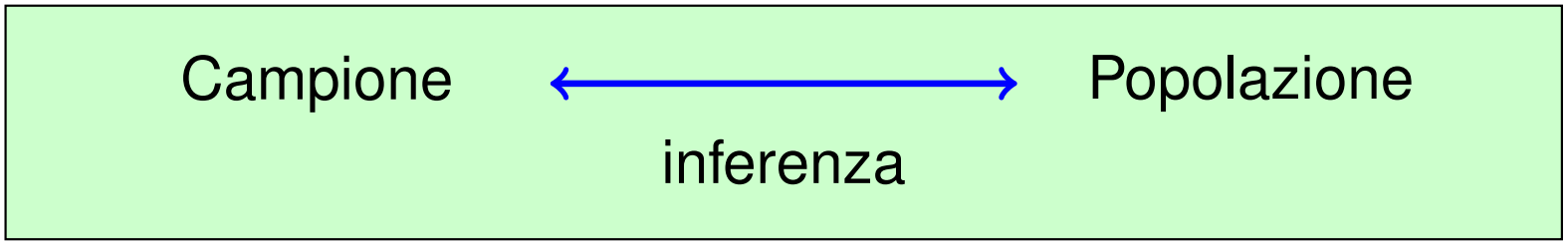
Rappresentatività

- Il campione selezionato “dovrebbe” rappresentare “in piccolo” la popolazione che si vuol studiare... quindi il campione dev’essere **rappresentativo**, ovvero deve avere le stesse caratteristiche della popolazione (e nella stessa proporzione)



Rappresentatività

- Sulla base del campione rappresentativo, estendiamo i dati ottenuti all'intera popolazione, tramite l'**inferenza statistica**



- Una volta selezionate le variabili che ci interessa studiare (che saranno chiamate *variabili dipendenti*), si individuano anche delle variabili che si ritengono importanti o che possono essere/produrre influenza su (che verranno chiamate *variabili indipendenti*). Il campione deve distribuirsi (in queste variabili) proporzionalmente alla popolazione

Numerosità del campione

- Dipende dal tipo di variabile/i che si vuol misurare e dall'ampiezza della popolazione
- Si sceglie normalmente una % della popolazione
- Il limite massimo è generalmente dato dai limiti materiali
- il limite minimo è (quasi sempre) 30 [per i motivi che si vedranno più avanti]
- Tutte le tecniche di estrazione si basano sull'estrazione casuale: la selezione di ogni caso statistico dipende unicamente dal caso
- Ogni caso estratto ha (deve avere) la stessa probabilità di tutti gli altri

Obiettivi della statistica inferenziale

Ci sono sostanzialmente tre obiettivi:

- Stimare il valore puntuale dei parametri della popolazione
- Determinare la stima intervallare
- Calcolare la probabilità di ottenere un certo valore di una statistica in base alle caratteristiche (parametri) di una certa popolazione

- In pratica, finora ci siamo occupati di campioni, interessandoci ai singoli individui (distribuzioni di frequenza)
- Adesso ci interessiamo ai gruppi (popolazioni) che hanno le stesse caratteristiche del nostro campione

Stima puntuale e intervallare

- Stima puntuale
  - Viene calcolato un unico valore che verrà **considerato la stima del parametro** della popolazione
  - Su questo unico valore calcoleremo una probabilità che costituisce una sorta di “rischio” nel prendere una decisione
- Stima intervallare
  - Vengono calcolate 2 stime diverse
  - che costituiscono il limite inferiore e quello superiore di un intervallo
  - entro questo intervallo di probabilità, cadrà il parametro della popolazione
  - e utilizzeremo questo intervallo per prendere una decisione

Distribuzione campionaria

- Se estraiamo un campione da una popolazione e il campione è rappresentativo di quella popolazione, il campione dovrebbe avere gli stessi indici statistici
- Ovviamente non è sempre vero
- Ma possiamo vedere/calcolare/studiare quanto potrebbero differire le statistiche calcolate su un campione rispetto ai parametri della popolazione da cui sono state tratte
- Per questo useremo campioni estratti da una popolazioni come se fossero “individui”
- E ci concentreremo sulla media (ma potremmo rifare lo stesso discorso sulla mediana)

Distribuzione campionaria

- Ipotizziamo di estrarre un campione di 100 casi da una popolazione e di calcolare la media di una certa variabile
- Usiamo la variabile **Fondamentalismo** da un campione di 659 persone come popolazione. La sua media è 90.3915
- Estraiamo un campione casuale di 100 persone e calcoliamo la media di questo campione: 91.46
- Estraiamo altri 20 campioni di ampiezza 100 dalla stessa popolazione e calcoliamo la media per ciascuno:

  87.83, 90.63, 91.90, 91.99, 90.10, 90.80, 93.84, 90.80, 89.80, 90.12, 90.71, 88.56, 89.67, 90.76, 87.77, 90.51, 89.78, 90.68, 90.40, 89.27

Distribuzione campionaria

	Scarto	
87.83	-2.56	
90.63	0.24	
91.90	1.51	
91.99	1.60	
90.10	-0.29	
90.80	0.41	
93.84	3.45	max
90.80	0.41	
89.80	-0.59	
90.12	-0.27	
90.71	0.32	
88.56	-1.83	
89.67	-0.72	
90.76	0.37	
87.77	-2.62	
90.51	0.12	
89.78	-0.61	
90.68	0.29	
90.40	0.01	min
89.27	-1.12	
91.46	1.07	
90.39		Media popolazione
90.35	-0.04	Media dei campioni

- Poiché vengono dalla stessa popolazione, la media di ogni campione estratta tenderà ad oscillare attorno alla media della popolazione
- Ma la media delle 20 medie, avrà un valore sicuramente più vicino alla media della popolazione: 90.296

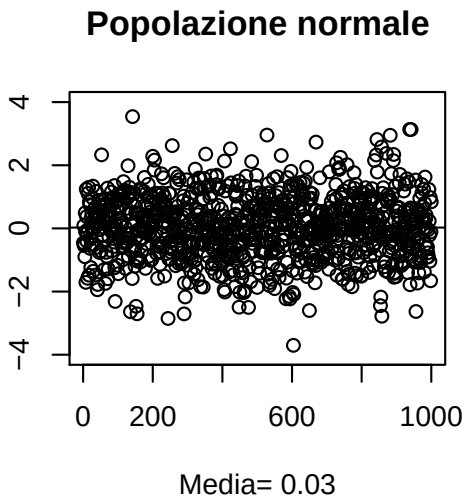
Distribuzione campionaria

- Anziché 20 campioni ne potremmo estrarre 10.000, avremmo 10.000 medie e potremmo costruire una distribuzione di frequenza di quelle medie
- L'importante è che ogni campione sia casuale, ovvero
  - ogni caso di un singolo campione ha la stessa probabilità di essere estratto degli altri
  - ogni possibile campione estraibile dalla popolazione ha la stessa probabilità degli altri
- La distribuzione di frequenza che costruiremmo con le medie dei campioni si chiama **distribuzione campionaria delle medie**
- Se il numero di campioni estratto è sufficientemente elevato, le medie dei campioni tenderanno a distribuirsi secondo la curva della normale

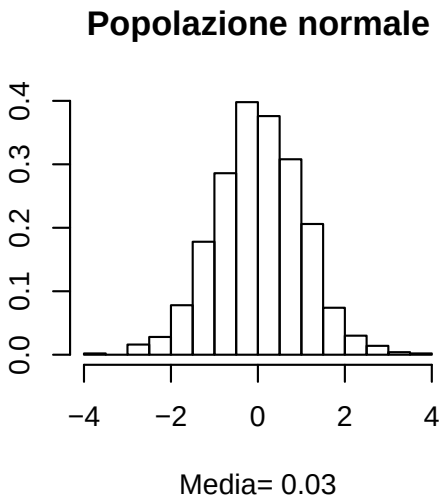
Distribuzione campionaria

- Se effettivamente estraessimo un numero elevatissimo di campioni da una popolazione (metodo Monte Carlo), avremmo una *distribuzione sperimentale*, mentre quella su cui noi lavoreremo è una *distribuzione teorica*
- La distribuzione campionaria delle medie si basa sul **teorema del limite centrale** che afferma che, all'aumentare dell'*ampiezza dei campioni*, la distribuzione campionaria della media si avvicinerà sempre più ad una distribuzione normale, indipendentemente dalla forma delle misurazioni individuali
- Se una variabile si distribuisce normalmente, anche piccoli campioni produrrano una distribuzione campionaria normale
- Con variabili non normali, la distribuzione campionaria deve avere N uguale a 30 o 40

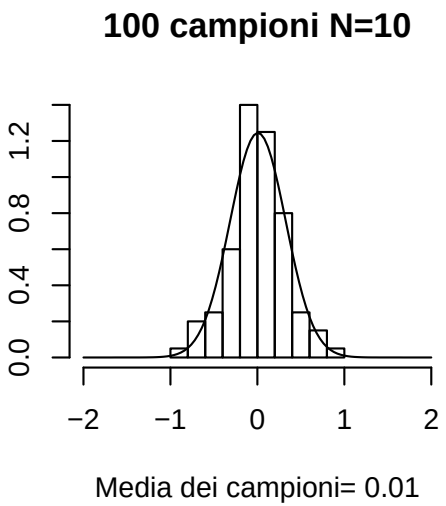
Distribuzione campionaria delle medie



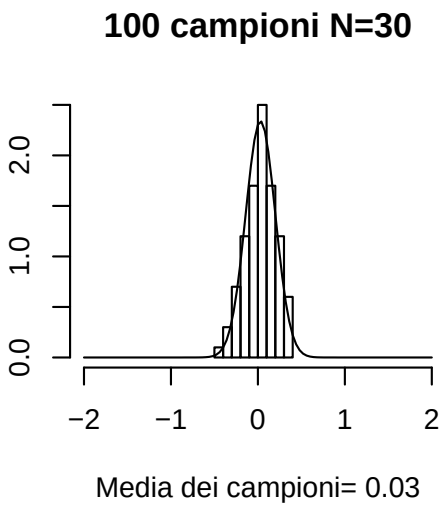
Media= 0.03



Media= 0.03



Media dei campioni= 0.01

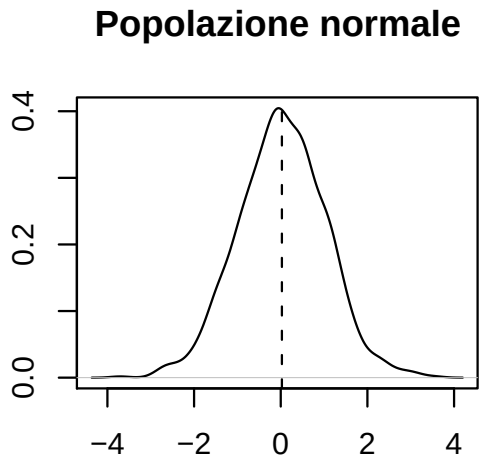


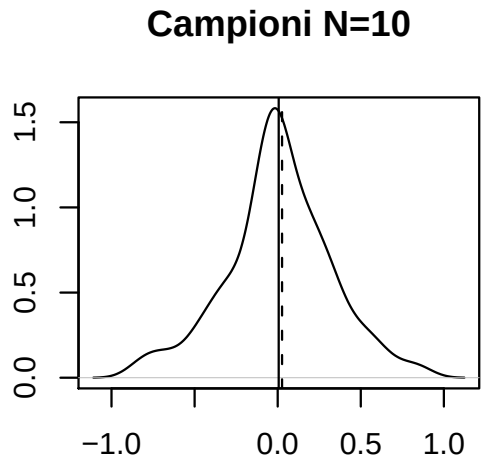
Media dei campioni= 0.03

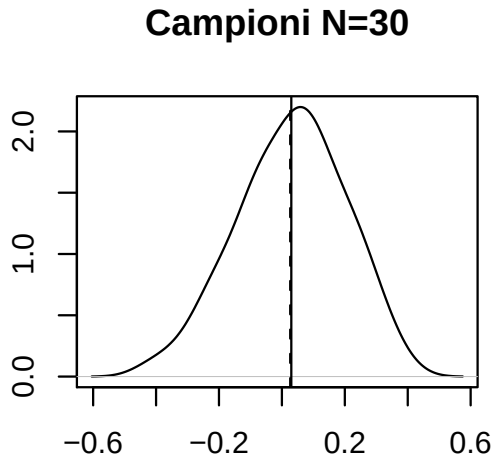
A partire da una popolazione **distribuita normalmente** (1000 casi, valori -4 4)

- abbiamo il grafico dei valori [1]
- l'istogramma delle frequenze [2]
- l'istogramma con normale di 100 campioni di ampiezza 10 [3]
- l'istogramma con normale di 100 campioni di ampiezza 30 [4]

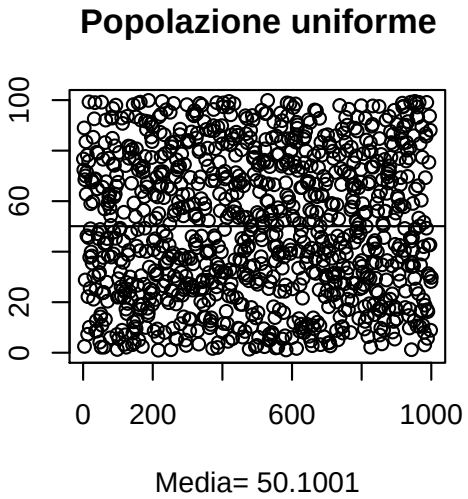
Distribuzione campionaria delle medie

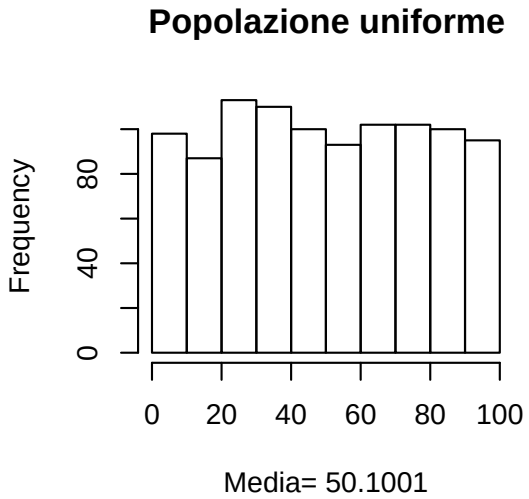


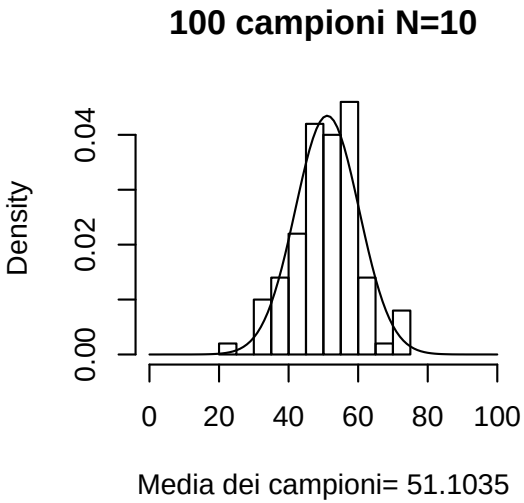


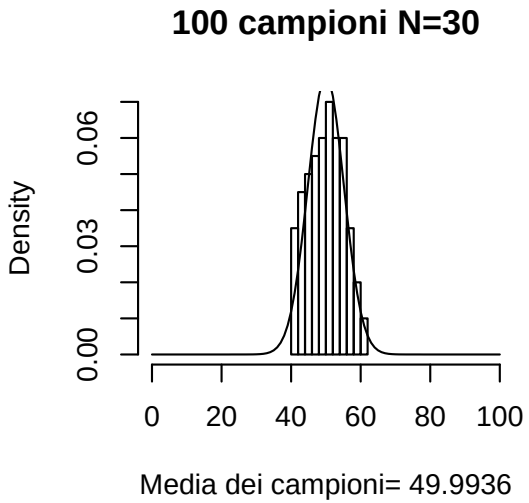


Distribuzione campionaria delle medie





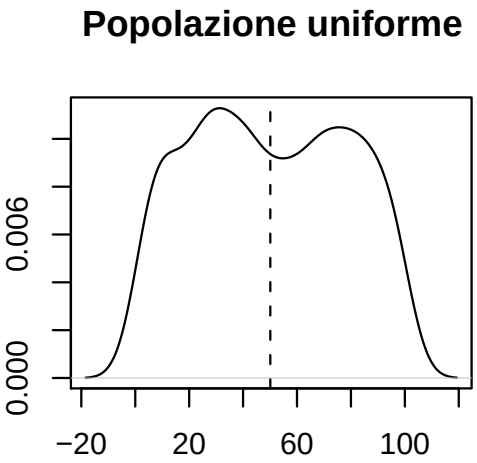


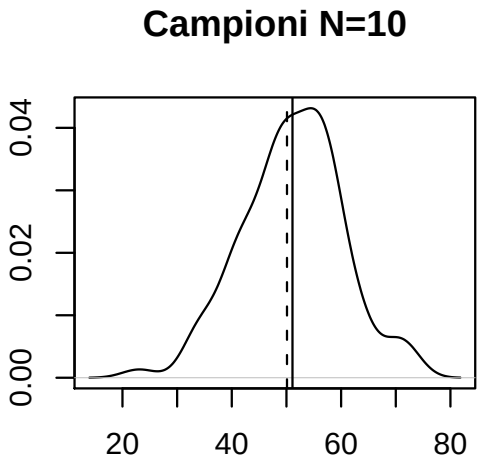


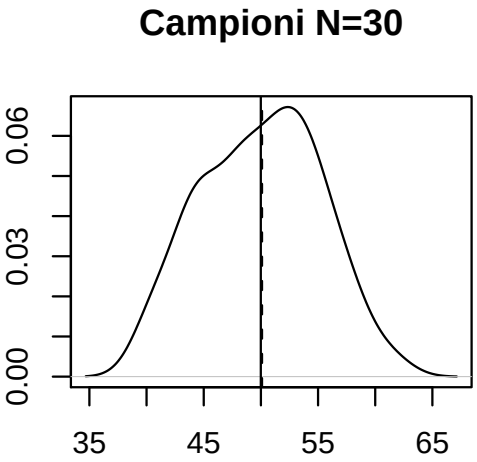
A partire da una popolazione **uniformemente distribuita** (1000 casi, valori 1-100)

- abbiamo il grafico dei valori [1]
- l'istogramma delle frequenze [2]
- l'istogramma con normale di 100 campioni di ampiezza 10 [3]
- l'istogramma con normale di 100 campioni di ampiezza 30 [4]

Distribuzione campionaria delle medie







Distribuzione campionaria

- La distribuzione campionaria è una distribuzione di probabilità e per una numerosità (N) del campione superiore o uguale a 30, tende verso una curva stabile (e “normale”) con

$$M_{\overline{x}} = \mu \quad \text{e} \quad \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

- $\sigma_{\overline{x}}$ è la *deviazione standard delle medie* anche conosciuta come **errore standard della media**
- indica quanto affidabile è ciascuna media campionaria
- valori piccoli indicano che, estraendo più campioni, le medie sarebbero abbastanza vicine fra loro
- valori grandi, che le medie campionarie sarebbero abbastanza disperse attorno a μ

Errore standard della media

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

- È più piccolo della deviazione standard della popolazione, perché
- Singoli “punteggi estremi” (anomali) sono più probabili di “medie estreme”, quindi la distribuzione delle medie sarà meno variabile rispetto alla popolazione
- Al crescere di N, le medie campionarie sono più raggruppate e l’errore standard diventa sempre più piccolo

Verifica d'ipotesi

La moneta è truccata?

Evento	p	p_{cum}
10T	0,00098	0,00098
9T	0,00977	0,01075
8T	0,04395	0,05470
7T	0,11719	0,17189
6T	0,20508	0,37697
5T	0,24609	0,62306
4T	0,20508	0,82814
3T	0,11719	0,94533
2T	0,04395	0,98928
1T	0,00977	0,99905
0T	0,00098	1,00003

- Se lancio 10 volte una moneta e cade 10 volte sulla stessa faccia, è truccata?
- Se non fosse truccata, quante probabilità avrei di ottenere 10 volte una stessa faccia?
- 10 volte -> P(10)=0.00098*2=0.00196
- la probabilità è così bassa che la moneta è quasi sicuramente truccata!

Verifica d'ipotesi

La moneta è truccata?

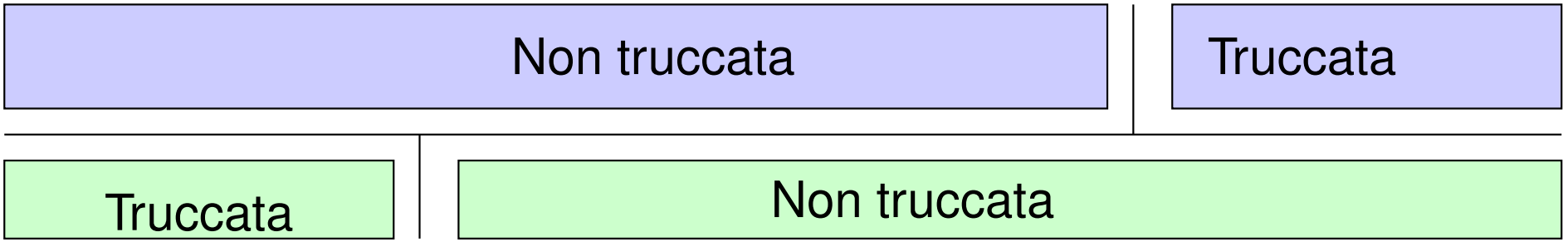
Evento	p	p_{cum}
10T	0,00098	0,00098
9T	0,00977	0,01075
8T	0,04395	0,05470
7T	0,11719	0,17189
6T	0,20508	0,37697
5T	0,24609	0,62306
4T	0,20508	0,82814
3T	0,11719	0,94533
2T	0,04395	0,98928
1T	0,00977	0,99905
0T	0,00098	1,00003

- E se ottenessi 9 volte la stessa faccia?
- 9 volte -> P(9) = 0.00977
- ma se escono 9 facce avrebbero potuto essere anche 10, quindi sommiamo
- almeno 9 volte -> p(10)+p(9)=0.01075*2=0.0215
- quindi una probabilità di 2 su 100
- È sufficientemente piccola?

Verifica d'ipotesi

La moneta è truccata?

- Per rispondere, devo stabilire un limite di probabilità, sotto il quale decido che la moneta è truccata e sopra che non lo è!



Verifica di ipotesi

- Possibilità 1 (ipotesi nulla): la moneta NON È truccata

$$P(t) = P(c) = 0.5$$

- Possibilità 2 (ipotesi alternativa): la moneta È truccata

$$P(t) \neq P(c) \neq 0.5$$

- L'ipotesi nulla (indicata anche come H_0) è tale, perché si basa su informazioni che abbiamo già e di cui siamo sicuri (una moneta non truccata ha probabilità 1/2)
- L'ipotesi alternativa (indicata come H_1) è l'ipotesi che contrapponiamo a quella nulla

Ipotesi nulla e alternativa

- L'ipotesi nulla è l'unica su cui si possono effettivamente fare calcoli
- L'ipotesi alternativa apre, invece, ad un insieme di possibilità ($P(t) = 0.4; P(t) = 0.3; P(t) = .2 \ldots$) che non è possibile verificare tutte contemporaneamente
- Se l'ipotesi nulla si dimostra **probabile**, la accetteremo per vera.
- Se l'ipotesi nulla si dimostra **improbabile**, opteremo per quella alternativa
- L'ipotesi alternativa la verifichiamo "per assurdo", ovvero dimostrando **probabilmente falsa** l'ipotesi nulla

Procedimento di verifica

- L'ipotesi alternativa può essere di due tipi: semplice/composta e mono-/bi-direzionale
  - semplice (H_1: μ = 20)
  - composta (H_1: 100 $\leq \mu \leq$ 120)
  - mono-direzionale (H_1: μ > 100) o (H_1: μ < 100)
  - bi-direzionale (H_1: $\mu \neq$ 100)
- Calcoleremo la probabilità che la statistica calcolata sul nostro campione possa corrispondere a quella stimata della popolazione
- Non avremo mai una risposta sicura ma solo la probabilità di un errore!
- Ovvero: qualunque decisione prenderemo (H_0 o H_1), ci sarà sempre la possibilità che la nostra scelta sia sbagliata.

Verifica d'ipotesi

- Supponiamo di voler sapere se i bambini che crescono in famiglie che hanno animali domestici hanno QI diversi da quelli dei bambini senza animali domestici.
- Nella popolazione generale, il QI è distribuito normalmente con $\mu = 100$ e $\sigma = 15$
- Raccogliamo un campione casuale di 25 soggetti (N = 25) che vivono con animali domestici e misuriamo il loro QI. La media è $\overline{X} = 103.48$
- Le ipotesi nulle e alternative sono:

$$H_0 : \mu = 100$$

$$H_1 : \mu > 100$$

I punti z per le medie campionarie

- Possiamo usare i punti z per trovare la posizione di un gruppo rispetto a tutti gli altri gruppi della stessa ampiezza
- Dobbiamo usare la distribuzione campionaria delle medie per i gruppi
- Dobbiamo calcolare il punto z e poi trovare l'area corrispondente

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{x}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

In questo caso il punteggio grezzo è la media del campione, la media di riferimento è quella della popolazione e la deviazione standard per cui dividiamo è l'errore standard della media campionaria

Verifica d'ipotesi

- Calcoliamo il punto z della nostra media:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{x}}} =$$

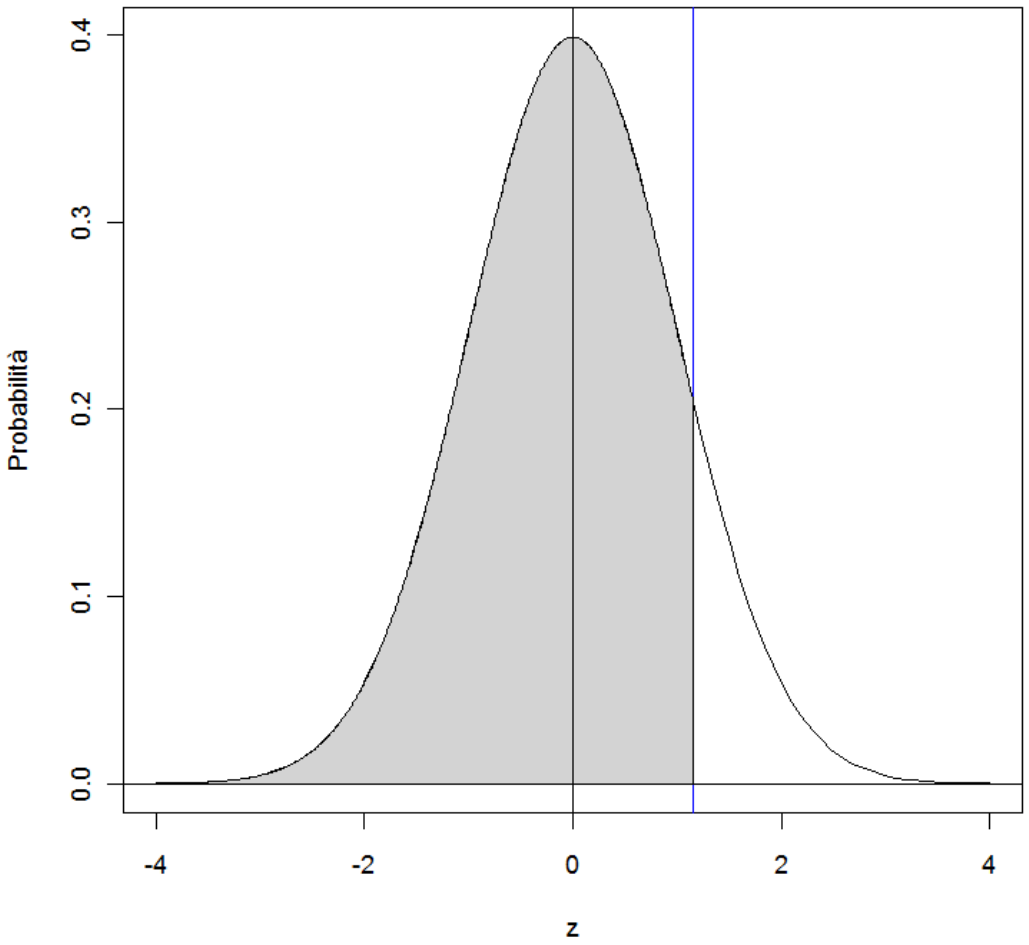
$$\frac{103.48 - 100}{\frac{15}{\sqrt{25}}} = 1.16$$

- Cerchiamo il punto z nella tavola A e troviamo l'area corrispondente

$$z(1.16) = .3730 = 37.30\%$$

$$50 + 37.30 = 87.30\%$$

$$50 - 37.30 = 12.70\%$$



Criterio di significatività

Ci sono due possibili percorsi:

- Valore *p*: la probabilità del risultato (in questo esempio, la probabilità di avere un valore $\overline{X} = 103.48$ o maggiore), che in questo caso è il 12,70%
- Valore critico: il punto z che cade alla destra dell'area significativa e che la separa dall'area non significativa rispetto all'ipotesi nulla; in questo caso, se decidiamo di correre un rischio massimo del 5%, cercheremo il punto z corrispondente ad un'area di 50%-5%=45%

In entrambi i casi abbiamo una

- Area di rifiuto (regione critica): l'area dal valore critico all'estremità della coda (la parte bianca del grafico di pagina precedente) oppure l'area corrispondente alla probabilità *p*

Criterio di significatività

- La regione critica si basa su un valore arbitrario, indicato con α, che è la probabilità di rifiutare H_0 quando, invece, è vera.
- Ci sono 2 tipi di errore:
  - Errore di primo tipo o α: l'errore di accettare per vera H_1 che, invece, è falsa ovvero di rifiutare H_0 che è invece vera
  - Errore di secondo tipo o β: l'errore di accettare per vera H_0 che, invece, è falsa ovvero rifiutare H_1 che invece è vera
  - Si chiama potenza di un test la sua capacità di accettare H_1 quando è vera [1-β]
  - Qualunque sia la decisione che prendiamo, corriamo un rischio calcolato
  - Il rischio viene calcolato tramite l'uso delle distribuzioni di probabilità

Relazioni fra errori e ipotesi

	Ipotesi	
	H_0 - Vera H_1 - Falsa	H_0 - Falsa H_1 - Vera
Accetto H_0; rifiuto H_1	Corretta $1 - \alpha$	Errore II tipo β
Rifiuto H_0; accetto H_1	Errore I tipo α	Corretta $1 - \beta$

- In psicologia si usano comunemente i seguenti valori di α:

  $\alpha = .05$ 5% *
  $\alpha = .01$ 1% **
  $\alpha = .001$ 0.1% ***

Verifica d'ipotesi

- La media del QI del campione di 25 bambini che vivono con animali domestici è di 103.48
- Questa media confrontata con i parametri della popolazione sta a z=1.16 sopra μ
- E corrisponde all'87.30% (per H_0) o a 12.70% (per H_1)
- Ovvero, la probabilità di estrarre (da una popolazione con $\mu = 100$ e $\sigma = 15$) un campione di 25 bambini che abbiano un QI medio di 103.48, è di 87.30%
- Un evento abbastanza probabile, per cui possiamo concludere che vivere con animali domestici non è connesso ad un QI superiore alla media

Procedimento generale

La verifica d'ipotesi avviene sempre tramite

- Identificazione dell'ipotesi nulla (H_0) e ipotesi alternativa (H_1) (che è generalmente connessa con il test statistico scelto)
- Scelta di un test statistico e calcolo della relativa statistica (v_t)
- Scelto un determinato livello α, calcolo della probabilità associata (p) oppure identificazione del valore critico (v_c)
- Accettazione o rifiuto di H_0, in base alla scelta:

- **Con** p
- Se $p < \alpha$, rifiuto H_0
- Se $p > \alpha$, accetto H_0

- **Con** v_c (in genere)
- Se $|v_c| < |v_t|$, rifiuto H_0
- Se $|v_c| > |v_t|$, accetto H_0

Procedimento generale in pratica

Applicato al campione di 25 ragazzi con $M = 103.48$ e confrontato con una popolazione con $\mu = 100$ e $\sigma = 15$

- **Con** p
- Se $p < \alpha$, rifiuto H_0
- Se $p > \alpha$, accetto H_0

- $p = .1270$ (12.70%)
- $\alpha = .05$ (5%)
- Accetto H_0

- **Con** v_c (in genere)
- Se $|v_c| < |v_t|$, rifiuto H_0
- Se $|v_c| > |v_t|$, accetto H_0

- $v_t = 1.03(puntoz)$
- cerco il punto z corrispondente ad $\alpha = .05$ (5%)
- cerco nella tavola un'area pari a $.5000 - .0500 = .4500$ (45%) ed è (circa) 1.64
- $v_c = 1.64 > v_t = 1.03$: accetto H_0

Assunti richiesti

Il test statistico per la Media di un campione estratto da una determinata popolazione richiede alcuni assunti fondamentali:

- Gli individui nel campione sono stati selezionati in modo casuale e sono fra loro indipendenti rispetto alla popolazione
- La variabile misurata si distribuisce normalmente nella popolazione (ma considera anche il Teorema del Limite Centrale)