Elementi di Psicometria

19-Introduzione alla probabilità e ai metodi non parametrici

vers. 1.0b (6 dicembre 2011)
versione per stampa

Germano Rossi[1]
germano.rossi@unimib.it

[1] Dipartimento di Psicologia, Università di Milano-Bicocca

2011-2012

Metodi parametrici/non parametrici

- Metodi parametrici: metodi di inferenza che fanno riferimento ai parametri della popolazione (o meglio alla loro stima). Richiedono variabili che si distribuiscano (nella popolazione e spesso anche nel campione) secondo curve di probabilità predefinite (ad es. la normale)
- Metodi non parametrici: metodi di inferenza che non fanno riferimento ai parametri della popolazione.
  - La probabilità della statistica si può calcolare direttamente
  - La statistica utilizzata ha una propria distribuzione di probabilità

  In genere si usano quando si lavora con variabili qualitative o variabili quantitative di cui si sospetta (o si conosce) la non normalità

Probabilità di un evento

- Nel linguaggio comune, usiamo parole come “sicuro, certo, probabile, possibile, impossibile...” per parlare dell’accadere di un fatto (evento):

possibile, probabile

0 impossibile — 1 certo, sicuro

- Un evento “sicuro, certo” accadrà sicuramente (e sarà un evento con probabilità uguale a 1, $P(x) = 1$)
- un evento impossibile non accadrà mai (non ci saranno eventi, e la sua probabilità si indica con zero $P(x) = 0$)

Teorie della probabilità

Usiamo il termine probabilità per indicare "*quanta* possibilità vi sia che un evento accada" fra diversi altri possibili (più di 0 e meno di 1, $0 < P(x) < 1$)

Esistono, sostanzialmente, 3 approcci teorici:

- classica: gli eventi possibili sono equiprobabili oppure la loro probabilità è teoricamente calcolabile o conoscibile (è stata sviluppata soprattutto per i giochi d'azzardo)
- frequentista: la probabilità dipende dalla frequenza con cui un certo evento è accaduto nel passato
- soggettiva: il rischio che siamo disposti a correre, la probabilità che associamo (senza fare calcoli espliciti) all'accadere di un evento

Probabilità classica

- Esistono diversi eventi possibili, ma *uno solo può accadere*; **alcuni** eventi possono essere utili ai nostri scopi, tutti gli altri no
- La probabilità si calcola dividendo gli eventi che ci servono rispetto a tutti gli eventi egualmente possibili

$$P(x) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{f}{n}$$

Esempio

Ottenere un numero superiore o uguale a 5 tirando un dado:

- se il dado non è truccato, la probabilità di ogni numero è identica
- due sono gli eventi utili (5 e 6), 6 gli eventi possibili
- $P(5, 6) = 2/6 = 1/3 = 0.33$

Probabilità classica

- La probabilità classica si può esprimere anche come rapporto di probabilità (in inglese, *odd*), ovvero il rapporto fra perdita e successo
$$\frac{\text{casi sfavorevoli}}{\text{casi favorevoli}} = \frac{s}{n-s} = \frac{s}{f}$$
- Ha senso solo all'interno della teoria classica, in cui si assume l'equiprobabilità degli eventi
- È usato soprattutto nel mondo anglosassone e nel mondo delle scommesse

Esempio

Il rapporto di probabilità relativo all'evento "ottenere un 5 o un 6 nel lancio di un dado" è
$$\frac{4}{2}$$

Probabilità frequentista

- Si usa quando gli eventi possibili non hanno la stessa probabilità
- La loro probabilità dipende dalle esperienze passate (frequenza empirica)
- Si chiama “frequentista” perché usiamo la frequenza (o meglio la proporzione) di una categoria come stima della probabilità del verificarsi di quella categoria
- È ampiamente usata dalle assicurazioni

Esempio

Se su 100 compiti di un esame, 15 sono insufficienti; in base alla probabilità frequentista, la probabilità di superare quell’esame sarebbe di 85/100=.85

Probabilità soggettiva

- È la stima che ciascuno di noi fa, sull'accadere di un evento su cui non abbiamo informazioni sicure
- Normalmente si usa nelle scommesse: "quanto scommetti che..." oppure nei giudizi: "mi consigli di fare...", "devo fare così... o così..."

Esempio

- Decidere di affrontare un'esame universitario, dipende dalla probabilità soggettiva di superarlo.
- Accellerare quando un semaforo diventa giallo, dipende dalla stima soggettiva (probabilità) di riuscire a passare prima che diventi rosso.

Regole della probabilità

- Una volta trovata la probabilità di un evento (classica, frequentista o soggettiva) le regole che si applicano sono le stesse
- La somma delle probabilità di tutti gli eventi alternativi (e possibili) è (dev'essere) pari a 1 (uno solo è l'evento che può accadere)
- La probabilità di ciascuno degli eventi possibili è **la distribuzione di probabilità** di quel tipo di evento
- Le regole sono:
    - addizionale (regola OR)
    - moltiplicativa (regola AND)

Regola addizionale (OR, o)

La probabilità che accada un evento A oppure un evento B è pari a:

- somma delle singole probabilità meno la probabilità dell'intersezione: $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- *se A e B sono mutualmente escludentisi fra di loro* cioè se $P(A \cap B) = 0$ (l'intersezione dei due eventi è nulla), allora:

$$P(A) + P(B)$$

Esempio

Probabilità di ottenere un numero pari con un lancio del dado
$P(2) + P(4) + P(6) - P(2 \cap 4 \cap 6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 - 0 = 3/6 = 1/2$

Regola addizionale (OR, o)

- *se A e B non sono mutualmente escludentisi*: $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (esistono eventi che cadono in entrambe le categorie)

Esempio

Probabilità di ottenere almeno un 5 o un 6 con 2 dadi

1. P(A=5,6 dado 1) = 2/6
2. P(B=5,6 dado 2) = 2/6
3. P(A∩ B=entrambi) = 4/36 $\Longrightarrow$
4. P(A) + P(B) - P(A∩ B) = 2/6 + 2/6 - 4/36 = (12+12-4) / 36 = 20/36

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	32	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Regola addizionale (OR, o)

Esercizio

Lanciando 4 monete qual è la probabilità di ottenere almeno 3 Teste? [3 o 4 T]

Soluzione

$P(3t) + P(4t) = .25 + .0625 = .3125$

Esercizio

Non più di 1C?

Soluzione

$P(0C) + P(1C)$

Regola addizionale (OR, o)

Esercizio

Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, qual è la probabilità che sia una figura oppure una carta di cuori?

Soluzione

$P(\text{figura}) + P(\text{cuori}) - P(\text{figura di cuori}) = 12/40 + 10/40 - 3/40 = 19/40$

Regola moltiplicativa (AND, e)

- La probabilità che accadano **contemporaneamente** 2 eventi (*fra loro indipendenti* oppure *con re-immissione*) è pari al prodotto delle singole probabilità

$$P(AeB) = P(A) \times P(B)$$

Esempio

Lanciando 4 monete, qual è la probabilità di ottenere 4 teste simultaneamente?

$$1/2 * 1/2 * 1/2 * 1/2 = .5 * .5 * .5 * .5 = .5^4 = .0625$$

Regola moltiplicativa (AND, e)

Esempio

E la probabilità di rispondere giustamente ad un questionario a scelta multipla di 30 domande? (4 scelte)

$$\frac{1}{4}^{30} = 8.67e - 19$$

- Se gli eventi **non sono indipendenti fra loro**, si usa la probabilità condizionata
- Ovvero la probabilità di un evento condizionato dall'accadere di un'altro evento: $P(A/B)$

Probabilità condizionata

	Genere	Età	Anni esperienza lavorativa
A	M	43	14
B	M	36	6
C	F	56	28
D	F	47	12
E	F	28	1
F	F	37	6
G	M	46	5
H	F	30	2
I	M	28	2
J	F	26	1

	F	M	
A(<=10)	4	3	7
B(>10)	2	1	3
	6	4	10

Esempio

Qual è la probabilità che, avendo estratto una femmina, questa abbia più di 10 anni di esperienza? (eventi dipendenti)

$2/6$ ovvero

$P(B/F) = P(B \cap F)/P(F)$

$$\frac{2}{10} / \frac{6}{10} = \frac{2}{10}\frac{10}{6} = \frac{2}{6}$$

Probabilità condizionale

- Probabilità di ottenere un certo evento dopo che si è verificato un primo evento:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{f_{A \cap B}}{f_B}$$

Esempio

Probabilità che, un asso estratto da un mazzo di 52 carte, sia di cuori (eventi *indipendenti*)

P(A=asso)=4/52=0.077

P(B=cuori)=13/52=0.25

$P(A \cap B) = 1/52 = 0.0192$

P(A/B)=(1/52) / (13/52) = 1/13 = .077

Probabilità condizionale

- Due eventi sono indipendenti fra loro se:

$$P(A/B) = P(A)$$

e se

$$P(B/A) = P(B)$$

ovvero se la probabilità del primo evento condizionata dal secondo è uguale a quella del primo

Esempio

$$P(A \cap B) = 1/52$$

P(A=asso)=4/52=1/13
P(A/B)=(1/52) / (13/52) = 1/13

P(B=cuori)=13/52=1/4
P(B/A)=(1/52) / (4/52) = 1/4

Applicare entrambe le regole

- Probabilità di 3 teste e 1 croce
- P(t) = P(c) = .5
- AND - 4 eventi simultanei = $.5^4 = .0625$
- OR - 4 possibili combinazioni (tttc, ttct, tctt, cttt) =

$$.0625 + .0625 + .0625 + .0625 = .0625 * 4 = .25$$

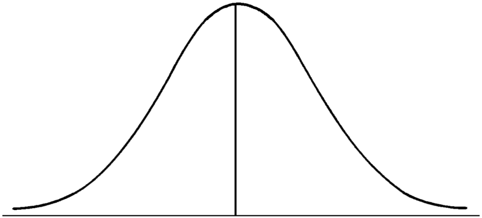
Distribuzioni di probabilità

- Tutti le alternative possibili di un “evento” costituiscono i “valori” di quell’evento
- I valori di un evento possono essere trattati come “misurazioni” e rappresentate come distribuzioni di frequenza (in questo caso di proporzioni)
- Esistono delle distribuzioni di probabilità le cui caratteristiche sono conosciute

Distr. di prob. note

- la distribuzione **normale**
- la distribuzione **normale standardizzata**
- la distribuzione **t di Student**
- la distribuzione **campionaria di...**
- la distribuzione di **chi-quadro** (χ^2)
- La distribuzione **binomiale**
- la distribuzione F di Snedecor
- la distribuzione ipergeometrica

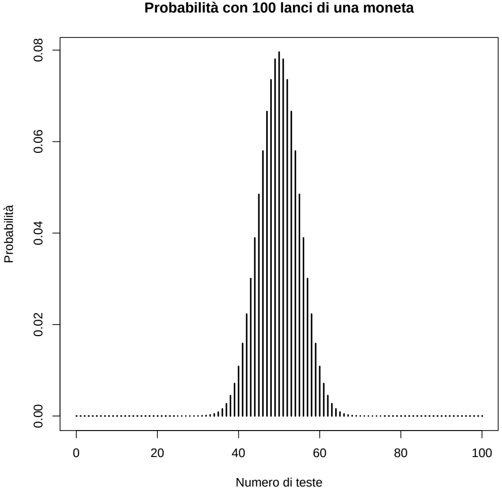
Distribuzione normale e standardizzata



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

dove $-\infty < x < \infty$;

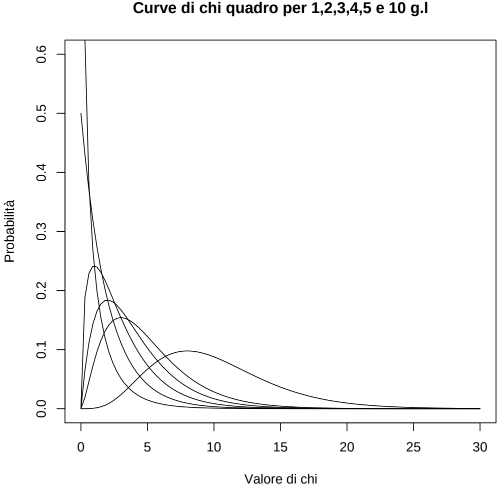
Distribuzione binomiale



$$P_X(x) = \binom{m}{x} p^x (1-P)^{m-x}$$

dove $x = 1, 2, \cdots m$;
p=probabilità

Distribuzione di chi-quadro (χ^2)



$$f(x) = \frac{2^{-k/2}}{\Gamma(k/2)} x^{(k-2)/2} e^{-x/2}$$

Caratteristiche

- Essendo distribuzioni di probabilità note, per ciascuna, noi conosciamo non solo la media e la deviazione standard, ma anche la porzione di area corrispondente ad ogni valore che compone la distribuzione
- Viceversa, conoscendo una porzione di area possiamo risalire al valore che vi è associato

Calcolo combinatorio

- Il calcolo combinatorio si occupa di calcolare in quanti modi una serie di oggetti può essere elencata
- Serve per rispondere a domande del tipo:
- Quante combinazioni si possono fare se voglio presentare 4 questionari in ordine sempre diverso?
- Quanti test t devo fare se ho 10 variabili da confrontare in base al genere?
- Prima di affrontare il calcolo combinatorio abbiamo bisogno di definire i simboli “fattoriale” e “coefficiente binomiale”

Fattoriale

- Il prodotto di tutti i numeri a partire da n fino a 1, si chiama fattoriale di n e si scrive $\mathbf{n}!$
- Cioè: $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 * 1$

Esempio

5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1
10!=10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1

- Per definizione:
  - $1! = 1$
  - $0! = 1$

Coefficiente binomiale

- Si chiama coefficiente binomiale un certo tipo di rapporto fra fattoriali

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Per definizione:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{0}{0} = 1$$

Esempio

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{24}{4} = 6$$

Distinzioni

- Il modo di enumerare delle cose, dipende dalla loro **quantità totale**, da **quanti ne enumero per volta**, dalla possibilità che si possano **ripetere**, dall'**ordine** in cui compaiono
- Se importa l'ordine con cui compaiono, si chiamano disposizioni
- Se l'ordine non importa, combinazioni
- Usiamo una D o una C per indicare le due possibilità
- Quindi indichiamo fra parentesi il numero totale di "oggetti", quanti ne usiamo per volta e se si possono ripetere:
  D(n,k,s/c) e C(n,k,s/c)

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Ripetizione</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Senza</td><td>Con</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ordine</td><td>Con</td><td colspan="2">Disposizione</td></tr>
<tr><td>Senza</td><td colspan="2">Combinazione</td></tr>
</table>

Disposizione senza ripetizione

- Devo fare una cena con 4 amici (**A**lberto, **B**runo, **C**arlo, **D**iego), ma ho solo 3 sedie. Li invito 2 alla volta e tengo conto dell'ordine in cui li dispongo (destra, sinistra rispetto a me). Quante cene devo fare?

AB	AC	AD
BA	BC	BD
CA	CB	CD
DA	DB	DC

$$D(n,k,s) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempio

$$D(4,2,s) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{24}{2} = 12$$

Combinazione senza ripetizione

- 12 cene sono troppe. Se non tengo conto dell'ordine, quante diventano?

AB=BA	AC=CA
AD=DA	BC=CB
BD=DB	CD=DC

$$C(n,k,s) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esempio

$$C(4,2,s) = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$$

Permutazioni

- Un caso particolare è la disposizione senza ripetizione in cui $k = n$

$$D(n, k, s) = P_n = n!, \text{ se } n = k$$

Esempio

In quanti modi possono disporsi 4 amici attorno ad un tavolo?

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ modi diversi}$$

Diposizione con ripetizione

- In quanti possibili modi possono cadere 2 dadi?
- Il primo dado un modo qualsiasi, il secondo anche, quindi $6 * 6$

$$D(n, k, c) = n^k$$

Esempio

$D(6, 2, c) = 6^2 = 36$

Esempio

Usando lettere e numeri, quante targhe italiane nuove posso fare [LL NNN LL]?

$$26^2 \cdot 10^3 \cdot 26^2 = 676 \cdot 1000 \cdot 676 = 456.976.000$$

Combinazione con ripetizione

- In quanti modi possono cadere 2 dadi, se non mi importa l'ordine dei numeri?
- Devo eliminare le sequenze che contengono le stesse cifre (12=21)

$$C(n, k, c) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Esempio

$$C(6, 2, c) = \binom{6+2-1}{2} = \frac{(6+2-1)!}{2!(6-1)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

Esempio unico con 2 dadi

$\mathbf{D(6,2,c) = 6^2 = 36}$

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	32	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

$\mathbf{D(6,2,s) = 6!/(6-2)! = 30}$

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	32	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Esempio unico con 2 dadi

$\mathbf{C(6,2,c) = 21}$

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	32	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

$\mathbf{C(6,2,s) = 15}$

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	32	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Esempio unico con 6 dadi

$$\mathbf{D(6,6,s) = 6! = 720}$$

123456	134562	145623	$\cdots$
234561	245613		
345612	$\cdots$		
456123			
561234			
612345			

Riepilogo formule

	Ripetizione	
	Senza	Con
Disposizione (con ordine)	$D(n,k,s) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$D(n,k,c) = n^k$
Combinazione (senza ordine)	$C(n,k,s) = \binom{n}{k}$	$C(n,k,c) = \binom{n+k-1}{k}$

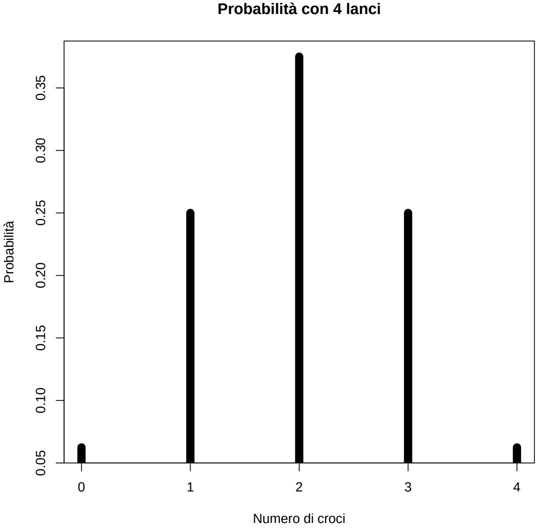
Binomiale: moneta

Se lanciamo una moneta 4 volte di seguito ci sono 16 possibili esiti (T=testa; C=croce):

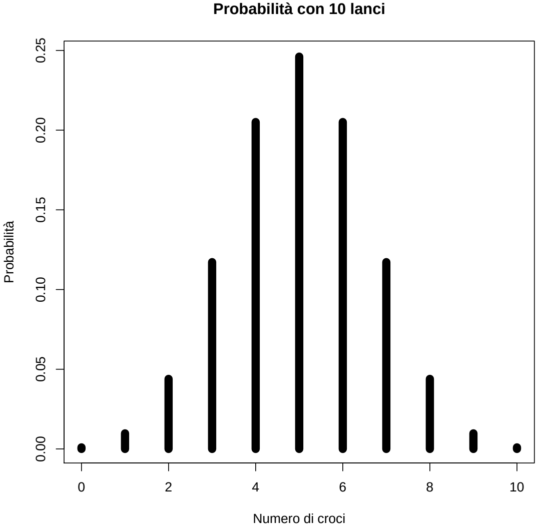
4T	->	tttt	1/16	.0625
3T, 1C	->	tttc, ttct, tctt, cttt	4/16	.2500
2T, 2C	->	ttcc, tcct, cctt, ctct, tctc, cttc	6/16	.3750
1T, 3C	->	tccc, ctcc, cctc, ccct	4/16	.2500
4C	->	cccc	1/16	.0625
			16	1.00

$$P(4T) = \binom{4}{4} = \frac{4!}{4!(0)!} \qquad P(2T) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(2)!}$$

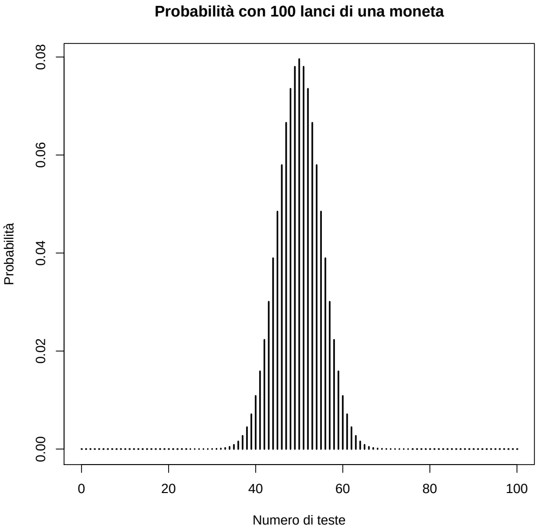
Distrib. di freq. 4 monete



Distrib. di freq. 10 monete



Distrib. di freq. 100 monete



Variabili e distribuzioni binomiali

- Si chiama variabile binomiale una variabile che può assumere solo due valori, non importa quali siano
- Le variabili dicotomiche sono anche binomiali
- La distribuzione di frequenza di una variabile binomiale è a sua volta binomiale
- Il caso più semplice è quello di una moneta che può assumere valori corrispondenti alle sue due facce
- Ma qualsiasi variabile può essere dicotomizzata; ad es. se lanciando un dado, spero di ottenere valori uguali o superiori a 5, i valori corrispondenti alle facce 1, 2, 3 e 4 vengono considerati come un tipo di risultato (non buoni=0) e le facce 5 e 6 come un secondo tipo di risultato (buono=1)

Variabili e distribuzioni binomiali

- Se vi sono più eventi dicotomici, le distribuzioni di frequenza andranno a formare una distribuzione di probabilità
- Ad esempio, se lancio 2 monete, gli eventi possibili sono TT, TC, CT, CC
- e la distribuzione di frequenza e relativa distribuzione di probabilità sarà:

	f	p
TT	1	1/4 = .25
TC/CT	2	2/4 = .50
CC	1	1/4 = .25

- qui si presume che la probabilità dei due eventi sia uguale

Variabili e distribuzioni binomiali

- Normalmente i due eventi possibili si classificano come
  - 1="successo"
  - 0="insuccesso"
- la probabilità del "successo" si identifica con p
- la probabilità dell' "insuccesso" si identifica con $q = 1 - p$
- la formula generica della distribuzione binomiale è:

$$P(x) = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}$$

dove $x = 1, 2, \cdots m$;
p=probabilità del successo

Formula generale della binomiale

$$P(x) = \boxed{\binom{m}{x}} \boxed{p^x} \boxed{(1-p)^{m-x}}$$

- coefficiente binomiale (combinazioni di m elementi presi x per volta)
- probabilità del successo elevata alla freq. dei successi
- probabilità dell'insuccesso elevata alla freq. degli insuccessi

Variabili e distribuzioni binomiali

- Se lancio 2 dadi, gli eventi possibili sono $6^2 = 36$
- Se considero un successo che almeno un dado abbia un valore superiore a 4, allora successo: $p = 2/6$ e insuccesso: $q = 1 - p = 4/6$;
- e la distribuzione di frequenza e relativa distribuzione di probabilità sarà:

	f	p
SS	1	$P(2) = \binom{2}{2} .33^2(1 - .33)^{2-2} = .111$
SI/IS	2	$P(1) = \binom{2}{1} .33^1(1 - .33)^{2-1} = .4445$
II	1	$P(0) = \binom{2}{0} .33^0(1 - .33)^{2-0} = .4445$

Inferenza binomiale

- La maggior parte delle inferenza tramite la binomiale si basa sull'ipotesi nulla $H_0 : p = .5$
- Si fa riferimento alla distribuzione binomiale di n elementi, in cui si sommano le probabilità delle code
- Si utilizza la formula precedente per valori fino a $n = 20$ circa
- Oltre tali valori, si può usare la distribuzione normale come una approssimazione alla binomiale, con $\mu = np$ e $s = \sqrt{npq}$ e calcolando il punto z

$$z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

  dove X è la frequenza dei successi e n il numero totale di eventi
- e confrontando poi la z trovata sulle tavole della normale

Inferenza binomiale

- Se abbiamo invece la proporzione dei successi, la formula precedente si trasforma in

$$z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

  dove p è la proporzione dei successi, π la proporzione della popolazione (ipotesi nulla)
- Questa formula si può usare per confrontare fra loro 2 proporzioni (la cui somma sia 1) per verificare l'ipotesi che si discostino dall'ipotesi nulla che $\pi = .5$ ma anche qualunque valore di π

SPSS: test binomiale

- Per effettuare il test binomiale, in SPSS, selezioniamo `Analizza | Test non parametrici | Binomiale`,
- mettiamo una variabile **dicotomica** in `Variabili oggetto del test`, impostiamo la `Proporzione attesa` se diversa da .5 e lasciamo attivato `Desumi dai dati`
- oppure mettiamo una variabile **non dicotomica** in `Variabili oggetto del test`, impostiamo la `Proporzione attesa` se diversa da .5 e indichiamo un `Punto di divisione`

SPSS: test binomiale

Test binomiale

		Categoria	Numerosità	Proporzione osservata.	Probabilità test.	Sig. Asint. a 2 code
gender	Gruppo 1	Female	57	,57	,50	,193[a]
	Gruppo 2	Male	43	,43		
	Totale		100	1,00		

a. Approssimazione basata su Z.

Test binomiale

		Categoria	Numerosità	Proporzione osservata.	Probabilità test.	Sig. Asint. a 2 code
phobia	Gruppo 1	<= 5	87	,87	,50	,000[a]
	Gruppo 2	> 5	13	,13		
	Totale		100	1,00		

a. Approssimazione basata su Z.

Test del segno

- Il test binomiale può essere applicato, come abbiamo visto, utilizzando una variabile binomiale. In questo caso verifichiamo la distribuzione interna della variabile
- Ma può essere usato anche per confrontare la distribuzione di due variabili dicotomiche in un campione. In questo caso si tratta di un test appaiato, il test del segno
- È un test che si applica su un campione appaiato (o meglio su due variabili simili di un campione), usando variabili a livello minimale (ordinale, nominale o intervallo non normale)
- In pratica si confrontano i due valori assunti dalle due variabili per un dato caso statistico e decidendo se assegnare 1 o 0 secondo una regola

Test del segno

- Ad esempio, ipotizziamo di valutare su una scala da 0 a 5 il grado di abilità di un certo numero di bambini prima di un nostro intervento educativo e di rivalutarli successivamente
- Siamo però dubbiosi sul fatto di aver usato correttamente la scala da 0 a 5
- Decidiamo allora di usare un test del segno per confrontare se da un punteggio "basso" (0-2) si è passati ad uno "alto" (3-5)
- Se vi è stato un "miglioramento" codificheremo con 1
- Se vi è stato un "peggioramento" codificheremo con -1
- Se non è cambiato, con 0

Test del segno

- Eliminiamo gli 0 (e diminuiamo la N)
- Considerando il numero degli 1 come X, applichiamo la formula

$$z = \frac{2X - N}{\sqrt{N}}$$

- che confronteremo, come sempre, sulla tavola della normale

SPSS: Test del segno

- Per applicare il test del segno in SPSS, selezioniamo `Analizza | Test non parametrici | 2 campioni dipendenti`, selezioniamo due variabili fra le coppie e `Segno` in *Tipo di test*

Frequenze

		Numerosità
hr_pre - hr_base	Differenze negative[a]	28
	Differenze positive[b]	63
	Valori pari merito[c]	9
	Totale	100

a. hr_pre < hr_base

b. hr_pre > hr_base

c. hr_pre = hr_base

Test[a]

	hr_pre - hr_base
Z	-3,564
Sig. Asint. a 2 code	,000

a. Test del segno